§12. Gauss の発散定理

ここでは, Green の定理, Stokes の定理に次いでベクトル解析における基本的な積分定理の１つである Gauss の発散定理について述べよう.
V を $\mathbf{R}^3$ の体積確定な領域とする. このとき, V の境界 ∂V は曲面となるが, ∂V の単位法ベクトルは V の外側へ向かうように選んでおく. この単位法ベクトルを外向き単位法ベクトルという.

Gauss の発散定理　V の近くで定義された任意の 3 次元ベクトル場 F に対して,

$$\iiint_V \operatorname{div} F dxdydz = \iint_{\partial V} F\overrightarrow{dA}.$$

証明　$\mathbf{R}^2$ の領域 D 上のスカラー値関数 f, g が

$$f(x,y) = g(x,y) \quad ((x,y) \in \partial D)$$

をみたし, V が

$$V = \{(x,y,z) | (x,y) \in D,\ f(x,y) \leq z \leq g(x,y)\}$$

と表され, F がスカラー場 φ を用いて

$$F = (0,0,\varphi)$$

と表されるときのみを考える.
一般のときは Stokes の定理の証明と同様である.
まず,

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div} F dxdydz &= \iiint_V \frac{\partial \varphi}{\partial z} dxdydz \\ &= \iint_D \left(\int_{f(x,y)}^{g(x,y)} \frac{\partial \varphi}{\partial z} dz \right) dxdy \\ &= \iint_D (\varphi(x,y,g(x,y)) - \varphi(x,y,f(x,y))) dxdy.\end{aligned}$$

一方, f, g のグラフをそれぞれ S_1, S_2 とおくと,

$$V = S_1 \cup S_2.$$

ν を ∂V の外向き単位法ベクトルとすると, S_1 上では

$$\nu = \frac{(f_x, f_y, -1)}{\sqrt{f_x^2 + f_y^2 + 1}}$$

だから,

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} F\overrightarrow{dA} &= \iint_D \langle (0,0,\varphi(x,y,f(x,y))), (f_x, f_y, -1) \rangle dxdy \\ &= -\iint_D \varphi(x,y,f(x,y)) dxdy.\end{aligned}$$

同様に, S_2 上では

$$\nu = \frac{(-g_x, -g_y, 1)}{\sqrt{g_x^2 + g_y^2 + 1}}$$

だから,

$$\iint_{S_2} F\overrightarrow{dA} = \iint_D \varphi(x,y,g(x,y))dxdy.$$

よって,

$$\begin{aligned}\iint_{\partial V} F\overrightarrow{dA} &= \iint_{S_1} F\overrightarrow{dA} + \iint_{S_2} F\overrightarrow{dA}\\ &= \iint_D (\varphi(x,y,g(x,y)) - \varphi(x,y,f(x,y)))dxdy\\ &= \iiint_V \operatorname{div} F dxdydz.\end{aligned}$$

□

例　$a>0$ とし,

$$V = \{(x,y,z)\in\mathbf{R}^3 | x^2+y^2+z^2\leq a^2\}$$

とおく.
V の境界 ∂V は原点中心, 半径 a の球面で, D を

$$D = \{(x,y)\in\mathbf{R}^2 | x^2+y^2\leq a^2\}$$

により定まる領域, f, g をそれぞれ

$$f(x,y) = -\sqrt{a^2-x^2-y^2},\ g(x,y) = \sqrt{a^2-x^2-y^2}\ ((x,y)\in D)$$

により定まる2変数のスカラー値関数とすると, ∂V は f のグラフと g のグラフの和集合である.
また, 3次元ベクトル場 F を

$$F(x,y,z) = (x,y,z) \quad ((x,y,z)\in\mathbf{R}^3)$$

により定める.
このとき, Gaussの発散定理がなりたつことを直接確かめてみよう.
まず,

$$\begin{aligned}\iiint_V \operatorname{div} F dxdydz &= \iiint_V 3dxdydz\\ &= 3\cdot\frac{4}{3}\pi a^3\\ &= 4\pi a^3.\end{aligned}$$

一方, f, g のグラフをそれぞれ S_1, S_2 とおくと,

$$\begin{aligned}\iint_{S_1} F\overrightarrow{dA} &= \iint_D \left\langle \left(x,y,-\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, -1\right)\right\rangle dxdy\\ &= \iint_D \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\iint_{S_2} F\overrightarrow{dA} &= \iint_D \left\langle \left(x,y,\sqrt{a^2-x^2-y^2}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}, 1\right)\right\rangle dxdy\\ &= \iint_D \frac{a^2}{\sqrt{a^2-x^2-y^2}}dxdy.\end{aligned}$$

ここで, 極座標変換を用いると, D は領域

$$E = \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写されるから,

$$\begin{aligned}
\iint_{\partial V} F\overrightarrow{dA} &= \iint_{S_1} F\overrightarrow{dA} + \iint_{S_2} F\overrightarrow{dA} \\
&= 2a^2 \iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\
&= 2a^2 \iint_E \frac{rdrd\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\
&= 2a^2 \int_0^{2\pi} \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} drd\theta \\
&= 2a^2 \int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= 2a^2 \left[-\sqrt{a^2 - r^2} \right]_0^a \cdot 2\pi \\
&= 2a^2 \cdot a \cdot 2\pi \\
&= 4\pi a^3.
\end{aligned}$$

上の例の 3 重積分では被積分関数が定数であったため, 積分の値は球の体積を求めればよかったが, 一般には空間極座標を用いて変数変換を行うと計算が進められる場合がある.
O を $\mathbf{R}^3$ の原点, $\mathrm{P}(x, y, z) \in \mathbf{R}^3$ とし, 線分 OP の長さを r とおく. 次に, z 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ とのなす角を θ とおく. 更に, P の xy 平面への射影を Q とし, x 軸とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ とのなす角を φ とおく. ただし, θ, φ はそれぞれ $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ の範囲に選んでおく. このとき,

$$x = r\sin\theta\cos\varphi,\ y = r\sin\theta\sin\varphi,\ z = r\cos\theta$$

がなりたち, (r, θ, φ) を空間極座標という. 空間極座標に対しても 3 次行列の行列式を用いて x, y, z の r, θ, φ に対する Jacobian $\dfrac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)}$ が定まり,

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, \varphi)} = \begin{vmatrix} x_r & x_\theta & x_\varphi \\ y_r & y_\theta & y_\varphi \\ z_r & z_\theta & z_\varphi \end{vmatrix} = r^2 \sin\theta$$

となることが分かる.
例えば, 原点中心, 半径 a の球は空間極座標を用いて変数変換を行うと, 領域

$$W = \{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

へ写されるから, その体積は 3 重積分

$$\iiint_W r^2 \sin\theta drd\theta d\varphi$$

の値に等しい.

問題 12

1. $a > 0$ に対して S を原点中心, 半径 a の球面とし, S の単位法ベクトルとしては外向き単位法ベクトルを考える. 3 次元ベクトル場 F を次の (1), (2) により定めるとき, Gauss の発散定理を用いて面積分 $\iint_S F\overrightarrow{dA}$ の値を求めよ.

(1) $F(x, y, z) = (yz, zx, xy)$ $((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$.
(2) $F(x, y, z) = (x^3, y^3, z^3)$ $((x, y, z) \in \mathbf{R}^3)$.

2. $\mathbf{R}^3 \setminus \{0\}$ で定義された 3 次元ベクトル場 F を

$$F(x, y, z) = \frac{(x, y, z)}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} \quad ((x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \setminus \{0\})$$

により定める.

(1) $\operatorname{div} F$ を求めよ.
(2) $a > 0$ に対して S を原点中心, 半径 a の球面とし, S の単位法ベクトルとしては外向き単位法ベクトルを考える. 面積分 $\iint_S F\overrightarrow{dA}$ の値を求めよ.

問題 12 の解答

1. まず,

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2\}$$

とおくと,

$$\partial V = S.$$

(1) Gauss の発散定理より,

$$\begin{aligned} \iint_S F\overrightarrow{dA} &= \iiint_V \operatorname{div}(yz, zx, xy) dxdydz \\ &= \iiint_V 0 dxdydz \\ &= 0. \end{aligned}$$

(2) 空間極座標を用いて変数変換を行うと, V は領域

$$W = \{(r, \theta, \varphi) | 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq \pi,\ 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$$

へ写されるから, Gauss の発散定理より,

$$\begin{aligned} \iint_S F\overrightarrow{dA} &= \iiint_V \operatorname{div}(x^3, y^3, z^3) dxdydz \\ &= \iiint_V 3(x^2 + y^2 + z^2) dxdydz \\ &= \iiint_W 3r^2 \cdot r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^a 3r^4 \sin\theta dr d\theta d\varphi \\ &= \int_0^a 3r^4 dr \int_0^{\pi} \sin\theta \int_0^{2\pi} d\varphi \\ &= \left[\frac{3}{5} r^5\right]_0^a \cdot [-\cos\theta]_0^{\pi} \cdot 2\pi \\ &= \frac{3}{5} a^5 \cdot 2 \cdot 2\pi \\ &= \frac{12}{5} \pi a^5. \end{aligned}$$

2. (1) まず,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} &= \frac{1 \cdot (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}} - x \cdot \frac{3}{2}(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{1}{2}} \cdot 2x}{(x^2 + y^2 + z^2)^3} \\ &= \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}} \\ &= \frac{-2x^2 + y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}. \end{aligned}$$

同様に,

$$\frac{\partial}{\partial y} \frac{y}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 - 2y^2 + z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}, \quad \frac{\partial}{\partial z} \frac{z}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{3}{2}}} = \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{5}{2}}}.$$

よって,

$$\operatorname{div} F = 0.$$

(2) D を

$$D = \{(x,y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq a^2\}$$

により定まる領域, f, g をそれぞれ

$$f(x,y) = -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2},\ g(x,y) = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\ ((x,y) \in D)$$

により定まる 2 変数のスカラー値関数とすると, S は f のグラフと g のグラフの和集合. f, g のグラフをそれぞれ S_1, S_2 とおくと,

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_1} F\overrightarrow{dA} \\
&= \iint_D \left\langle \frac{1}{a^3}\left(x, y, -\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, -1\right)\right\rangle dxdy \\
&= \iint_D \frac{dxdy}{a\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.
\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}
&\iint_{S_2} F\overrightarrow{dA} \\
&= \iint_D \left\langle \frac{1}{a^3}\left(x, y, \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\right), \left(\frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, \frac{y}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}, 1\right)\right\rangle dxdy \\
&= \iint_D \frac{dxdy}{a\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}.
\end{aligned}$$

ここで, 極座標変換を用いると, D は領域

$$E = \{(r,\theta) | 0 \leq r \leq a,\ 0 \leq \theta \leq 2\pi\}$$

へ写されるから,

$$\begin{aligned}
\iint_S F\overrightarrow{dA} &= \iint_{S_1} F\overrightarrow{dA} + \iint_{S_2} F\overrightarrow{dA} \\
&= \frac{2}{a}\iint_D \frac{dxdy}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}} \\
&= \frac{2}{a}\iint_E \frac{rdrd\theta}{\sqrt{a^2 - r^2}} \\
&= \frac{2}{a}\int_0^{2\pi}\int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} drd\theta \\
&= \frac{2}{a}\int_0^a \frac{r}{\sqrt{a^2 - r^2}} dr \int_0^{2\pi} d\theta \\
&= \frac{2}{a}\left[-\sqrt{a^2 - r^2}\right]_0^a \cdot 2\pi \\
&= \frac{2}{a} \cdot a \cdot 2\pi \\
&= 4\pi.
\end{aligned}$$