§11. 変分問題

関数の極値問題においては極値をあたえる点の候補は定義域の内部の点では微分が消える点として特徴付けることができた. これに対して変分問題とは関数や写像からなる集合を定義域とするような関数に対する極値問題である. 変分問題の解, すなわち極値をあたえる関数や写像の候補は微分方程式の解として特徴付けることができる.
変分問題において考える関数の定義域は様々なので, まずは簡単のため, 次のような集合 X と X で定義された関数 F を考えよう.
閉区間 $[a,b]$ および $x_1, x_2 \in \mathbf{R}^n$ を固定しておき,

$$X = \{\varphi : [a,b] \to \mathbf{R}^n | \varphi \text{ は } C^1 \text{ 級で}, \ \varphi(a) = x_1, \ \varphi(b) = x_2\}$$

とおく.
更に, $f(t,x,y)$ を集合 $[a,b] \times \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で C^1 級の実数値関数とし, X で定義された関数 F を

$$F(\varphi) = \int_a^b f(t, \varphi(t), \varphi'(t))dt \quad (\varphi \in X)$$

により定める. 関数 F の定義域 X は微分積分などに現れる $\mathbf{R}^n$ の領域に比べ, とても大きな集合である. このようなとき, F は関数といわずに, 汎関数ということが多い.
ここで, F が $\varphi \in X$ で最小値をとると仮定する.
簡単のため, $n = 1$ としよう.
$[a,b]$ で C^1 級の関数 h が

$$h(a) = h(b) = h'(a) = h'(b) = 0$$

をみたすとする.
このとき, $\varepsilon \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\varphi + \varepsilon h \in X$$

である.
仮定より,

$$\begin{aligned}
0 &= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} F(\varphi + \varepsilon h) \\
&= \left.\frac{d}{d\varepsilon}\right|_{\varepsilon=0} \int_a^b f(t, \varphi + \varepsilon h, \varphi' + \varepsilon h')dt \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi,\varphi')h + \frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi,\varphi')h' \right) dt \\
&= \left[\left(\int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi,\varphi')dt \right) h \right]_a^b - \int_a^b \left(\int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi,\varphi')dt \right) h'dt + \int_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi,\varphi')h'dt \\
&= \int_a^b \left(-\int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi,\varphi')dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi,\varphi') \right) h'dt.
\end{aligned}$$

上の条件をみたす関数 h はたくさん存在するので, 最後の式が 0 となるということから, 被積分関数に現れる

$$-\int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi,\varphi')dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi,\varphi')$$

は 0 になりそうである. 次の事実より, それは正しい.

変分法の基本補題　閉区間 $[a,b]$ で連続な関数 f が

$$h(a) = h(b) = 0$$

となる $[a,b]$ で連続な任意の関数 h に対して

$$\int_a^b fh dx = 0$$

をみたすならば, f は恒等的に 0 となる.
h に関する条件は C^n 級などのように更に強めることができる.

上の計算を更に続けよう.
変分法の基本補題より,

$$-\int_a^t \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi,\varphi')dt + \frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi,\varphi') = 0.$$

よって, 微分方程式

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f}{\partial y}(t,\varphi,\varphi')\right) = \frac{\partial f}{\partial x}(t,\varphi,\varphi')$$

が得られる. これを Euler-Lagrange 方程式という.
測地線は曲線の長さを汎関数とする変分問題の解として特徴付けることができる.

例　(u,v) を曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の等温座標系,

$$E(du^2 + dv^2)$$

を p の第一基本形式とする.
曲面 p 上の 2 点 x_1, x_2 を固定しておき,

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(a) = x_1,\ \gamma(b) = x_2$$

となる p 上の曲線とする.
更に,

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in [a,b])$$

と表しておき, $L(\gamma)$ を γ の長さとすると,

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{E(u,v)(\dot{u}^2 + \dot{v}^2)}dt$$

である.
ここで,

$$f(t,u,v,y_1,y_2) = \sqrt{E(u,v)(y_1^2 + y_2^2)}$$

とおくと,

$$\frac{\partial f}{\partial u} = \frac{E_u(y_1^2 + y_2^2)}{2\sqrt{E(y_1^2 + y_2^2)}},\ \frac{\partial f}{\partial v} = \frac{E_v(y_1^2 + y_2^2)}{2\sqrt{E(y_1^2 + y_2^2)}}.$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = \frac{Ey_1}{\sqrt{E(y_1^2+y_2^2)}},\ \frac{\partial f}{\partial y_2} = \frac{Ey_2}{\sqrt{E(y_1^2+y_2^2)}}.$$

ここでは, $\gamma(t)$ を

$$p(u(t)+\varepsilon_1 h_1(t), v(t)+\varepsilon_2 h_2(t))$$

のように変形して考えるので, Euler-Lagrange 方程式は 2 つ現れることに注意しよう.
γ を弧長により径数付けておくと, $L(\gamma)$ の被積分関数は 1 となるから Euler-Lagrange 方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{d}{ds}(Eu') = \dfrac{1}{2}E_u\{(u')^2+(v')^2\}, \\ \dfrac{d}{ds}(Ev') = \dfrac{1}{2}E_v\{(u')^2+(v')^2\}. \end{cases}$$

第 1 式は

$$(E_u u' + E_v v')u' + Eu'' = \frac{1}{2}E_u\{(u')^2+(v')^2\}.$$

すなわち,

$$u'' + \frac{1}{2}\frac{E_u}{E}(u')^2 + \frac{E_v}{E}u'v' - \frac{1}{2}\frac{E_u}{E}(v')^2 = 0.$$

同様に, 第 2 式より,

$$v'' - \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(u')^2 + \frac{E_u}{E}u'v' + \frac{1}{2}\frac{E_v}{E}(v')^2 = 0.$$

Christoffel の記号を用いると,

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{uu}^u(u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{uu}^v(u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v(v')^2 = 0. \end{cases}$$

これは問題 4 において現れた測地線の方程式である.
測地線は必ずしも固定された点を結ぶ曲線全体の中で最短のものとは限らない. 例えば, 球面上の測地線を考えてみればよい. 問題 3 において扱ったことと微分方程式の解の一意性より, 球面上の測地線は大円の一部であることに注意しよう. しかし, 局所的には測地線は最短曲線となることが分かる.

例 (Dirichlet 問題)
D を $\mathbf{R}^2$ の有界領域とする. D の境界 ∂D で定義された関数 w を固定しておき, ∂D で w となる D で C^1 級の実数値関数 φ に対して

$$E(\varphi) = \frac{1}{2}\iint_D \left\{\left(\frac{\partial\varphi}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial v}\right)^2\right\} dudv$$

とおく. $E(\varphi)$ を φ のエネルギーという. また, $E(\varphi)$ を汎関数とする変分問題を Dirichlet 問題という.
このとき, Euler-Lagrange 方程式は

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial v^2} = 0$$

となることが分かる. よって, Dirichlet 問題の解は境界であたえられた関数となる調和関数である.

問題 11

1. 閉区間 $[a,b]$ および $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ を固定しておき,

$$X = \{\varphi : [a,b] \to \mathbf{R} | \varphi \text{ は } C^1 \text{ 級で}, \varphi(a) = x_1, \varphi(b) = x_2\}$$

とおく. X で定義された汎関数 F を

$$F(\varphi) = \int_a^b \varphi(t)\sqrt{1+(\varphi'(t))^2}dt \quad (\varphi \in X)$$

により定める.
(1) Euler-Lagrange 方程式を求めよ.
(2) (1) で求めた Euler-Lagrange 方程式を解け. ただし, 条件

$$\varphi(a) = x_1,\ \varphi(b) = x_2$$

はみたさなくてもよい.

2. $x_1 \neq x_2$ をみたす $x_1, x_2 \in \mathbf{R}$ を固定しておき,

$$X = \{\varphi : [0,1] \to \mathbf{R} | \varphi \text{ は } C^1 \text{ 級で}, \varphi(0) = x_1, \varphi(1) = x_2\}$$

とおく. X で定義された汎関数 F を

$$F(\varphi) = \int_0^1 (t\varphi'(t))^2\, dt \quad (\varphi \in X)$$

により定める. 更に, $\varepsilon > 0$ に対して $\varphi_\varepsilon \in X$ を

$$\varphi_\varepsilon(t) = x_1 + \frac{(x_2 - x_1)\tan^{-1}\dfrac{t}{\varepsilon}}{\tan^{-1}\dfrac{1}{\varepsilon}} \quad (t \in [0,1])$$

により定める.
(1) 極限値

$$\lim_{\varepsilon \to +0} F(\varphi_\varepsilon)$$

を求めよ.
(2) $F(\varphi) = 0$ となる $\varphi \in X$ は存在しないことを示せ. 特に, F の下限をあたえる $\varphi \in X$ は存在しないことが分かる. この例を Weierstrass の反例という.

問題 11 の解答

1. (1) まず,

$$f(t,x,y) = x\sqrt{1+y^2}$$

とおくと,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \sqrt{1+y^2},\ \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{xy}{\sqrt{1+y^2}}.$$

よって, Euler-Langrange 方程式は

$$\frac{d}{dt}\frac{\varphi\varphi'}{\sqrt{1+(\varphi')^2}} = \sqrt{1+(\varphi')^2}.$$

すなわち,

$$\frac{\{(\varphi')^2+\varphi\varphi''\}\sqrt{1+(\varphi')^2} - \varphi\varphi'\dfrac{\varphi'\varphi''}{\sqrt{1+(\varphi')^2}}}{1+(\varphi')^2} = \sqrt{1+(\varphi')^2}.$$

整理すると,

$$(\varphi')^2+\varphi\varphi'' - \frac{\varphi(\varphi')^2\varphi''}{1+(\varphi')^2} = 1+(\varphi')^2.$$

すなわち,

$$\varphi\varphi'' = (\varphi')^2+1. \tag{$*$}$$

(2) $(*)$ より,

$$\frac{\varphi'\varphi''}{(\varphi')^2+1} = \frac{\varphi'}{\varphi}.$$

両辺を積分すると,

$$\log\left\{(\varphi')^2+1\right\} = \log\varphi^2 + C_1 \quad (C_1\in\mathbf{R}).$$

e^{C_1} を改めて C_1^2 とおくと, $C_1\neq 0$ で,

$$(\varphi')^2 = C_1^2\varphi^2 - 1.$$

すなわち,

$$\frac{C_1\varphi'}{\sqrt{C_1^2\varphi^2-1}} = \pm C_1.$$

両辺を積分すると,

$$\log\left|C_1\varphi + \sqrt{C_1^2\varphi^2-1}\right| = \pm(C_1t+C_2) \quad (C_2\in\mathbf{R}).$$

よって,

$$\log\left|C_1\varphi - \sqrt{C_1^2\varphi^2-1}\right| = \mp(C_1t+C_2) \quad (\text{複号同順}).$$

上の 2 つの式を合わせると,

$$\varphi = \pm\frac{1}{C_1}\cosh(C_1t+C_2).$$

2. (1) まず,

$$
\begin{aligned}
t\varphi_\varepsilon'(t) &= t\frac{x_2-x_1}{\tan^{-1}\dfrac{1}{\varepsilon}}\frac{\dfrac{1}{\varepsilon}}{1+\left(\dfrac{t}{\varepsilon}\right)^2} \\
&= \frac{x_2-x_1}{\tan^{-1}\dfrac{1}{\varepsilon}}\frac{\varepsilon t}{\varepsilon^2+t^2}.
\end{aligned}
$$

ここで,

$$
\begin{aligned}
\int_0^1 \left(\frac{\varepsilon t}{\varepsilon^2+t^2}\right)^2 dt &= \int_0^{\frac{1}{\varepsilon}} \varepsilon\left(\frac{s}{1+s^2}\right)^2 ds \\
&\leq \varepsilon\int_0^{+\infty}\left(\frac{s}{1+s^2}\right)^2 ds \\
&= \varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\tan\theta}{1+\tan^2\theta}\right)^2\frac{d\theta}{\cos^2\theta} \\
&= \varepsilon\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta d\theta \\
&\leq \frac{\pi}{2}\varepsilon.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq F(\varphi_\varepsilon) \\
&\leq \left(\frac{x_2-x_1}{\tan^{-1}\dfrac{1}{\varepsilon}}\right)^2\frac{\pi}{2}\varepsilon \\
&\to 0 \quad (\varepsilon\to+0).
\end{aligned}
$$

したがって, はさみうちの原理より,

$$
\lim_{\varepsilon\to+0}F(\varphi_\varepsilon)=0.
$$

(2) $F(\varphi)=0$ となる $\varphi\in X$ が存在すると仮定する.
このとき, 任意の $t\in[0,1]$ に対して

$$
t\varphi'(t)=0.
$$

よって, φ は定数.
$x_1\neq x_2$ だから, φ は

$$
\varphi(0)=x_1,\ \varphi(1)=x_2
$$

をみたさない.
これは矛盾.
したがって, $F(\varphi)=0$ となる $\varphi\in X$ は存在しない.