§2. Lie 群

Lie 群とは大雑把に言えば群という代数的構造と多様体という幾何的構造を兼ね備えたものである. なお, ここでは簡単のため, 実 Lie 群のみを扱うことにする.
G を群とし, 同時に C^∞ 級多様体でもあるとする. このとき, 直積 $G \times G$ は直積多様体となることに注意しよう.
G は群であるから, 積をとる演算は $G \times G$ から G への写像を定め, 逆元をとる演算は G から G への写像を定める. これらの写像が C^∞ 級となるとき, G を Lie 群という.

例 (Euclid 空間)
n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ はベクトル空間としての加法に関して群であると同時に, n 次元 C^∞ 級多様体でもある.
このとき, 加法は $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への C^∞ 写像を定め, 逆ベクトルをとる演算は $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^n$ への C^∞ 写像を定める.
よって, $\mathbf{R}^n$ は Lie 群である.

例 (直積 Lie 群)
G, H を Lie 群とする.
まず, 直積集合 $G \times H$ は直積群となる. すなわち, $(g_1, h_1), (g_2, h_2) \in G \times H$ に対して

$$(g_1, h_1)(g_2, h_2) = (g_1 g_2, h_1 h_2)$$

とおくと, これは $G \times H$ の群演算を定める.
一方, $G \times H$ は直積多様体としての構造ももち, 群演算は C^∞ 級となる.
よって, $G \times H$ は Lie 群である. $G \times H$ を G と H の直積 Lie 群という.

例 (トーラス)
$\mathbf{R}^2$ を $\mathbf{C}$ と同一視しておき, 円 S^1 を

$$S^1 = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$$

と表しておく.
このとき, S^1 は複素数の積を用いることにより, 群となる.
また, S^1 は 1 次元 C^∞ 級多様体でもあり, 群演算は C^∞ 級となる.
よって, S^1 は Lie 群である.
更に, S^1 の n 個の直積を T^n と表す. すなわち, T^n は n 次元トーラスである.
上の例より, T^n は Lie 群である.

例 (実一般線形群)
$M_n(\mathbf{R})$ を n 次実行列全体の集合, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ を正則な n 次実行列全体の集合とする.
まず, $M_n(\mathbf{R})$ は自然に n^2 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^{n^2}$ と同一視することができるから, n^2 次元 C^∞ 級多様体である.
一方, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は行列の積に関して群である. $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ を n 次実一般線形群という.
ここで, 行列式を対応させる関数は $M_n(\mathbf{R})$ で定義された連続関数で,

$$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) \,|\, |X| \neq 0\}.$$

よって, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開集合である.
したがって, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開部分多様体となるから, n^2 次元 C^∞ 級多様体である.

更に, 行列の積は成分の 2 次多項式として表され, 逆行列は成分の有理関数として表されるから, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は Lie 群となる.

よく現れる Lie 群は実一般線形群の閉部分群, すなわち閉集合であり, かつ部分群として表されるものである. 実は次がなりたつ.

定理 G を Lie 群, H を G の部分集合とする. H が G の閉部分群ならば, H は Lie 群となる.

例 (線形 Lie 群)
$\mathrm{O}(n)$ を n 次直交行列全体の集合とする.
まず, $\mathrm{O}(n)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の部分群である. $\mathrm{O}(n)$ を n 次直交群という.
ここで,

$$\mathrm{O}(n) = \{X \in \mathrm{GL}(n, \mathbf{R}) | {}^t XX = E\}$$

と表されることにも注意しよう. ただし, E は n 次の単位行列である.
上の式の右辺の条件式より, $\mathrm{O}(n)$ は $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の閉集合である.
よって, 上の定理より, $\mathrm{O}(n)$ は Lie 群である.
$\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ を行列式が 1 の n 次実行列全体の集合とする.
上と同様に考えると, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ は Lie 群である.
$\mathrm{SL}(n, \mathbf{R})$ を n 次実特殊線形群という.
$\mathrm{SO}(n)$ を行列式が 1 の n 次直交行列全体の集合とする.
上と同様に考えると, $\mathrm{SO}(n)$ は Lie 群である.
$\mathrm{SO}(n)$ を n 次特殊直交群という.
$\mathrm{O}(n), \mathrm{SL}(n, \mathbf{R}), \mathrm{SO}(n)$ のように $\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ の閉部分群として表される Lie 群を線形 Lie 群という.

Lie 群の単位元における接ベクトル空間はベクトル空間としての構造の他に, Lie 環という代数的構造をもつ.
まず, Lie 環について述べよう. なお, 簡単のため, 実 Lie 環のみを扱うことにする.

定義 $\mathfrak{g}$ を $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間とする. $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ から $\mathfrak{g}$ への写像

$$[\ ,\ ] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \to \mathfrak{g}$$

が次の (1)〜(3) をみたすとき, $(\mathfrak{g}, [\ ,\ ])$ または単に $\mathfrak{g}$ を Lie 環という. また, $[\ ,\ ]$ を括弧積という.

(1) $[\ ,\ ]$ は双線形写像. すなわち, $a, b \in \mathbf{R}$, $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ とすると,
$[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$, $[X, aY + bZ] = a[X, Y] + b[X, Z]$.

(2) $[\ ,\ ]$ は交代的. すなわち, $X, Y \in \mathfrak{g}$ とすると, $[X, Y] = -[Y, X]$.

(3) $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ とすると, $[[X, Y], Z] + [[Y, Z], X] + [[Z, X], Y] = 0$ (Jacobi の恒等式).

例 $X, Y \in M_n(\mathbf{R})$ に対して $[X, Y] = XY - YX$ とおく.
このとき, $(M_n(\mathbf{R}), [\ ,\ ])$ は Lie 環となる.

例 M を C^∞ 級多様体, $\mathfrak{X}(M)$ を M 上の C^∞ 級ベクトル場全体の集合とする.
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とすると, 括弧積 $[X, Y] \in \mathfrak{X}(M)$ を定めることができる.
$(\mathfrak{X}(M), [\ ,\ ])$ は無限次元の Lie 環である.

次に, Lie 群に付随する Lie 環について述べよう.
G を Lie 群とし, $g \in G$ とする.
G から G への写像 L_g を

$$L_g(x) = gx \quad (x \in G)$$

により定めると, L_g は G から G への C^∞ 級微分同相写像となる. L_g を g による左移動という.
X を G 上のベクトル場で任意の $g \in G$ に対して

$$(L_g)_* X = X$$

をみたすものとする. ただし, $(L_g)_* X$ は L_g の微分 dL_g を用いて

$$((L_g)_* X)_{gx} = (dL_g)_x(X_x) \quad (x \in G)$$

により定まる G 上のベクトル場である. このとき, X を左不変ベクトル場という.
G 上の左不変ベクトル場全体の集合を $\mathfrak{g}$ と表す. 左不変ベクトル場は C^∞ 級ベクトル場であることが分かる. すなわち, 上の例の記号を用いると, $\mathfrak{g} \subset \mathfrak{X}(G)$ である.
更に, L_g は C^∞ 級微分同相写像だから, $X, Y \in \mathfrak{g}$ とすると,

$$\begin{aligned}(L_g)_*[X, Y] &= [(L_g)_* X, (L_g)_* Y] \\ &= [X, Y].\end{aligned}$$

よって, $\mathfrak{g}$ は $\mathfrak{X}(G)$ の括弧積に関して Lie 環となる. $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環という.
ここで, $\mathfrak{g}$ の定義より, $X \in \mathfrak{g}$ とすると, 任意の g に対して

$$X_g = (dL_g)_e(X_e)$$

がなりたつ. ただし, e は G の単位元である.
よって, X から X_e への対応は $\mathfrak{g}$ から単位元 e における接空間 T_eG への線形同型写像となる.
特に, $\mathfrak{g}$ は次元が G の次元と等しい Lie 環である.
また, 上の対応により, $\mathfrak{g}$ と T_eG を同一視することが多い.

例　$\mathrm{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開部分多様体だから, 包含写像の微分を用いて $T_e(\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}))$ と $M_n(\mathbf{R})$ を同一視することができる.
$M_n(\mathbf{R})$ の Lie 環としての構造を上の例のように定めると, この同一視は Lie 環としての同一視も与える. 実際, 上の包含写像を ι とし, $X, Y \in T_e(\mathrm{GL}(n, \mathbf{R}))$ とすると,

$$(d\iota)_e([X, Y]) = [(d\iota)_e(X), (d\iota)_e(Y)]$$

がなりたつことが分かる.
この同一視を用いるとき, $M_n(\mathbf{R})$ を $\mathfrak{gl}(n, \mathbf{R})$ と表すことが多い.

最後に, Lie 環と Lie 群を結びつける指数写像というものについて簡単に述べておこう.
G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とし, $X \in \mathfrak{g}$ とする. ただし, $\mathfrak{g}$ は T_eG と同一視している. このとき, $\mathbf{R}$ から G への C^∞ 級写像 γ で, 任意の $s, t \in \mathbf{R}$ に対して

$$\gamma(s + t) = \gamma(s)\gamma(t)$$

がなりたち, $\dfrac{d\gamma}{dt}(0) = X$ となるものが一意的に存在することが分かる. このとき, $\exp X = \gamma(1)$ とおく. 写像

$$\exp : \mathfrak{g} \to G$$

を指数写像という.
なお, 上の γ は $\gamma(t) = \exp(tX)$ と表すことができる. また, 線形 Lie 群の場合には, 上の例のような同一視を行うと, 指数写像は行列の指数関数を用いて表すことができる.

関連事項 2. 複素多様体

平面 $\mathbf{R}^2$ の点 (x, y) に対して複素数 $x + iy$ を対応させることにより, $\mathbf{R}^2$ を $\mathbf{C}$ と同一視しよう. D を $\mathbf{C}$ の開集合, f を D で定義された複素数値関数とし, $z_0 \in D$ とする. 極限値

$$\lim_{h \to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h}$$

が存在するとき, f は z_0 で正則であるという. 任意の $z_0 \in D$ において f が z_0 で正則なとき, f は D で正則であるという.
正則関数は実変数実数値の微分可能な関数とは大きく異なる. まず, f を実部と虚部に分けて $f = u + iv$ と表しておくと, u, v は Cauchy-Riemann 方程式

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}, \ \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

をみたす. 特に, u, v は D 上の調和関数となる. 更に, f は D の各点において Taylor 展開可能であることが分かる.
同様に, $\mathbf{C}^n$ の開集合から $\mathbf{C}^m$ への正則写像を定義することができる. すなわち, $\mathbf{C}^n$ の開集合 D から $\mathbf{C}^m$ への写像 f を

$$f = (f_1(z_1, z_2, \dots, z_n), f_2(z_1, z_2, \dots, z_n), \dots, f_m(z_1, z_2, \dots, z_n)) \quad ((z_1, z_2, \dots, z_n) \in D)$$

と表しておくとき, 各 z_i $(i = 1, 2, \dots, n)$ に関して各 f_j $(j = 1, 2, \dots, m)$ が正則関数ならば, f を正則写像というのである.
$\mathbf{C}^n$ の開集合を正則写像で張り合わせることにより, 複素 n 次元の複素多様体の概念が得られる. なお, $\mathbf{R}^n$ の開集合を張り合わせることによって得られる多様体は実多様体ということもある. 複素 n 次元複素多様体は実 $2n$ 次元実多様体でもある.
C^∞ 級実多様体上の C^∞ 級関数は非常に多く存在した. これに対して, 正則写像は単なる微分可能な関数よりも強い条件をみたさなければならないため, すべてが実多様体の場合と同様にいく訳ではない. 例えば, 連結なコンパクト複素多様体上の正則関数は定数関数に限ることが分かる.
複素 Euclid 空間 $\mathbf{C}^n$ はもちろん複素 n 次元複素多様体である. また, 実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ を定義する際に現れた $\mathbf{R}$ を $\mathbf{C}$ に置き替えることにより, 複素射影空間 $\mathbf{C}P^n$ が得られる. $\mathbf{C}P^n$ は複素 n 次元の複素多様体である.
Lie 群に対しても複素 Lie 群というものを考えることができる. すなわち, 複素 Lie 群とは群であると同時に複素多様体でもあり, 積をとる演算や逆元をとる演算が正則写像となるものである. 線形 Lie 群は複素 Lie 群の場合においても重要な例である.
$M_n(\mathbf{C})$ を n 次複素行列全体の集合, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ を正則な n 次複素行列全体の集合とする. このとき, $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ は複素 Lie 群となる. $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ を n 次複素一般線形群という.
$\mathrm{U}(n)$ を n 次ユニタリ行列全体の集合, $\mathrm{SL}(n, \mathbf{C})$ を行列式が 1 の n 次複素行列全体の集合, $\mathrm{SU}(n)$ を行列式が 1 の n 次ユニタリ行列全体の集合とする. このとき, これらは複素 Lie 群となる. $\mathrm{U}(n), \mathrm{SL}(n, \mathbf{C}), \mathrm{SU}(n)$ をそれぞれ n 次ユニタリ群, n 次複素特殊線形群, n 次特殊ユニタリ群という. これらは $\mathrm{GL}(n, \mathbf{C})$ の閉部分群として表される線形 Lie 群である.