§9. 平行移動

Euclid 空間に描かれたベクトルは始点を動かすことによって平行移動することができる．このことを一般化し，アファイン接続をもつ多様体の接ベクトルを曲線に沿って平行移動することを考えよう．
M を C^∞ 級多様体，∇ を M のアファイン接続，

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とする．このとき，§8 において扱ったように，γ による誘導接続 ∇^γ が定められるのであった．

定義　$\xi \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ に対して

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \xi = 0 \qquad (*)$$

がなりたつとき，ξ は γ に沿って平行であるという．

$(*)$ を座標近傍を用いて表してみよう．
$t \in I$ に対して (U, φ) を $\gamma(t) \in U$ となる M の座標近傍とし，

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n),\ \xi(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)}$$

と表しておく．また，Γ^k_{ij} を (U, φ) に関する Christoffel の記号とする．
このとき，§7 において計算したことより，

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \xi = \sum_{k=1}^n \left(\frac{d\xi_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n \xi_i \frac{d\gamma_j}{dt} \left(\Gamma^k_{ji} \circ \gamma\right) \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_{\gamma(t)}$$

となる．
よって，$(*)$ は

$$\frac{d\xi_k}{dt} + \sum_{i,j=1}^n (\Gamma^k_{ij} \circ \gamma) \frac{d\gamma_i}{dt} \xi_j = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (**)$$

と同値である．これは $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ に関する 1 階の連立線形常微分方程式であることに注意しよう．
$t_0 \in I$ を固定しておくと，常微分方程式の解の存在と一意性より，各 $v \in T_{\gamma(t_0)}M$ に対して $\xi(t_0) = v$ となる γ に沿って平行なベクトル場 $\xi \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ が一意的に存在する．v から $\xi(t)$ への対応を γ に沿う平行移動という．
上の微分方程式は線形で，$\xi(t)$ から v への対応も γ の向きを逆にした曲線に沿う平行移動であるから，平行移動は接空間の間の線形同型写像をあたえる．

例　∇ を Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ の Levi-Civita 接続とし，$\mathbf{R}^n$ の局所座標系として直交座標系を選んでおく．このとき，Christoffel の記号 Γ^k_{ij} はすべて 0 である．
よって，$(**)$ は

$$\frac{d\xi_k}{dt} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

これを解くと，$\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ はすべて定数である．
したがって，$\mathbf{R}^n$ の接空間を $\mathbf{R}^n$ と自然に同一視しておくと，任意の曲線に沿う平行移動は $\mathbf{R}^n$ の恒等変換である．

Riemann 多様体に計量的なアファイン接続があたえられている場合を考えよう. 次の定理は §8 において述べた定理の特別な場合である.

定理　(M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を g に関して計量的な M のアファイン接続,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とし, $\xi,\eta \in \mathfrak{X}_\gamma(I,M)$ とする. このとき,

$$\frac{d}{dt}g_\gamma(\xi,\eta) = g_\gamma\left(\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\xi,\eta\right) + g_\gamma\left(\xi,\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}}\eta\right).$$

上の定理において, ξ,η がともに γ に沿って平行なときは

$$\frac{d}{dt}g_\gamma(\xi,\eta) = 0$$

となるから, $g_\gamma(\xi,\eta)$ は定数関数である. すなわち, 計量的なアファイン接続に関して, 平行移動は Riemann 計量を保つ.

例　原点中心, 半径 1 の球面 S^2 に対して, Euclid 空間 $\mathbf{R}^3$ へのはめ込みによる誘導計量を考える. 座標近傍 (U,φ) として, 極座標を用いて

$$U = \{(\sin x_1\cos x_2, \sin x_1\sin x_2, \cos x_1) | 0 < x_1 < \pi,\ 0 < x_2 < 2\pi\},$$

$$\varphi(\sin x_1\cos x_2, \sin x_1\sin x_2, \cos x_1) = (x_1,x_2) \quad ((\sin x_1\cos x_2, \sin x_1\sin x_2, \cos x_1) \in U)$$

を選んでおく.
このとき, S^2 の誘導計量は

$$ds^2 = dx_1^2 + (\sin^2 x_1)dx_2^2$$

と表され, 対応する Christoffel の記号は

$$\Gamma^1_{22} = -\sin x_1\cos x_1,\ \Gamma^2_{12} = \Gamma^2_{21} = \frac{\cos x_1}{\sin x_1}$$

以外はすべて 0 であることが分かる.
ここで, $0 < x_0 < \pi$ を固定しておき, S^2 上の C^∞ 級曲線を上の座標近傍を用いて

$$\gamma(t) = (x_0, t) \quad (t \in (0,2\pi))$$

により定める.
γ に沿うベクトル場

$$\xi(t) = \sum_{i=1}^2 \xi_i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)}$$

が γ に沿って平行であるとすると,

$$\begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} - (\sin x_0\cos x_0)\xi_2 = 0, \\ \dfrac{d\xi_2}{dt} + \dfrac{\cos x_0}{\sin x_0}\xi_1 = 0. \end{cases}$$

これを解くと,

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2\sin x_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\lambda t & \sin\lambda t \\ -\sin\lambda t & \cos\lambda t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}.$$

ただし, $\lambda = \cos x_0$, $\alpha, \beta \in \mathbf{R}$ である.
$\mathbf{R}^n$ の平行移動と異なり, 一般には γ が 1 周して戻ってきても平行移動して得られる接ベクトルは異なるものとなってしまうのである.

§5 において扱った測地線はアファイン接続をもつ多様体に対して考えることができる.
M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とする. このとき, $\dfrac{d\gamma}{dt} \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ であることに注意しよう.

定義 $\dfrac{d\gamma}{dt}$ が γ に沿って平行, すなわち

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$$

となるとき, γ を測地線という.

上の微分方程式を測地線の方程式ともいう. 座標近傍を用いて表した測地線の方程式は §5 においても現れたが, $(**)$ において

$$\xi_j = \frac{d\gamma_j}{dt}$$

とおいて得られるものである.
測地線の微分方程式は 2 階の常微分方程式ではあるが線形ではないため, $\mathbf{R}$ で定義された測地線の存在は保証されない. 任意の初期値に対して $\mathbf{R}$ で定義された測地線が存在するとき, アファイン接続は測地的完備であるという. 関連事項 5 も参考にするとよい.

例 M を C^∞ 級多様体, ∇ を測地的完備な M のアファイン接続とする.
$p_0 \in M$ を任意に選んで固定しておくと, $M \setminus \{p_0\}$ は M の開部分多様体となる.
ここで, $\nabla|_M$ を ∇ を $M \setminus \{p_0\}$ に制限して得られるアファイン接続とする. このとき, $\nabla|_M$ は測地的完備ではない.

例 $\mathbf{R}$ のアファイン接続 ∇ を

$$\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d}{dt} = \frac{d}{dt}$$

により定める.
このとき, Christoffel の記号は

$$\Gamma^1_{11} = 1$$

によりあたえられるから, 測地線の方程式は

$$\frac{d^2\gamma}{dt^2} + \left(\frac{d\gamma}{dt}\right)^2 = 0.$$

ここで, 初期条件

$$\gamma(0) = 0,\ \frac{d\gamma}{dt}(0) = 1$$

をみたす解は

$$\gamma(t) = \log(t+1).$$

よって, ∇ は測地的完備ではない.

関連事項 9. 標準座標系

関連事項5においてRiemann多様体の指数写像について述べたが, 指数写像はアファイン接続さえあたえられていれば, Riemann多様体の場合とまったく同様に定義することができる.
M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とし, $p \in M$ とする. このとき, p における指数写像 $\exp_p$ は T_pM の原点の近傍から M への写像で, $v \in T_pM$ に対して t が 0 に十分近いとき,

$$\gamma(t) = \exp_p(tv)$$

により定まる M 上の曲線は

$$\gamma(0) = p,\ \frac{d\gamma}{dt}(0) = v$$

となる測地線である.
更に, $\exp_p$ は T_pM の原点の近傍から p の近傍への C^∞ 級微分同相写像となるから, 指数写像を用いて座標近傍を定めることができる. すなわち, U を $\exp_p$ の定義域の $\exp_p$ による像とすると, $(U, \exp_p^{-1})$ は $p \in U$ となる座標近傍である.
T_pM はベクトル空間であるから, 自然な座標系を選ぶことができる. すなわち, T_pM の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を固定しておくと, 任意の $v \in T_pM$ は

$$v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R})$$

と表すことができるから, $\exp_p^{-1}$ を

$$\exp_p^{-1} = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ x_i(\exp_p v) = a_i\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と表すことができる. $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を正規座標系または標準座標系という.
p を通る測地線は標準座標系を用いると, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ に対して

$$\gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n),\ \gamma_i(t) = a_i t\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と表される. ここで, 上の式を測地線の方程式

$$\frac{d^2\gamma_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma_i}{dt}\frac{d\gamma_j}{dt} = 0 \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

に代入すると,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(a_1 t, a_2 t, \ldots, a_n t) a_i a_j = 0.$$

更に, $t = 0$ とすると,

$$\sum_{i,j=1}^{n} \Gamma_{ij}^k(p) a_i a_j = 0$$

で, $a_1, a_2, \ldots, a_n$ は任意だから, 任意の i, j, k に対して

$$\Gamma_{ij}^k(p) + \Gamma_{ji}^k(p) = 0$$

である. 特に, ∇ の捩れがないならば, Christoffelの記号は p においてすべて 0 となる.