§12. ベクトル束の接続

§7において扱ったアファイン接続を一般化し, ベクトル束の接続を定義しよう.
以下では C^∞ 級多様体 M 上のベクトル束 E の切断全体からなる集合を $\Gamma(E)$ と表すことにする. $\Gamma(E)$ は自然にベクトル空間となり, $\Gamma(E)$ の元には $C^\infty(M)$ の元を掛けることができる.

定義　M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束とする. ∇ を $\xi \in \Gamma(E)$ および $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_X \xi \in \Gamma(E)$ を対応させる写像

$$\nabla : \Gamma(E) \times \mathfrak{X}(M) \to \Gamma(E)$$

とする. 任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$, 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ および任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して次の (1)〜(4) がなりたつとき, ∇ を E の接続という. また, $\nabla_X \xi$ を ξ の X に関する共変微分という.

(1) $\nabla_{X+Y}\xi = \nabla_X \xi + \nabla_Y \xi$.
(2) $\nabla_{fX}\xi = f\nabla_X \xi$.
(3) $\nabla_X(\xi + \eta) = \nabla_X \xi + \nabla_X \eta$.
(4) $\nabla_X(f\xi) = (Xf)\xi + f\nabla_X \xi$.

アファイン接続の場合と同様に, (2) より, 各 $p \in M$ において $\nabla\xi$ は T_pM から E_p への線形写像を定める.
また, TM の接続は M のアファイン接続に他ならない.

注意　テンソル積を用いると, ベクトル束の接続は線形写像

$$\nabla : \Gamma(E) \to \Gamma(T^*M \otimes E)$$

で, 任意の $f \in C^\infty(M)$ および任意の $\xi \in \Gamma(E)$ に対して

$$\nabla(f\xi) = df \otimes \xi + f\nabla\xi$$

をみたすものとして定義することができる.
$T^*M \otimes E$ の切断を E に値をとる 1 次微分形式ともいう.
同様に, $\bigwedge^k T^*M \otimes E$ の切断を E に値をとる k 次微分形式という.

定理　M をパラコンパクト C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束とする. このとき, E の接続が存在する.

証明　直積束に対しては接続が存在することに注意する.
例えば, 通常の Euclid 空間に値をとる関数の微分として接続を定義すればよい.
M はパラコンパクトだから, 局所的に構成した接続を 1 の分割を用いて足し合わせれば E の接続が得られる. □

接続全体の空間はアファイン空間となる. すなわち, 接続全体の空間は 1 つ接続を選んで, それを原点とすると, ベクトル空間となる.

定理　M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, ∇^0 を E の接続とする. ∇ も E の接続とすると, ある $\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \mathrm{End}\, E)$ が存在し

$$\nabla = \nabla^0 + \alpha$$

と表される.

証明　まず,

$$\alpha = \nabla - \nabla^0$$

とおく.
∇^0, ∇ はともに E の接続だから, $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ とすると,

$$\begin{aligned}\alpha(\xi+\eta) &= \nabla(\xi+\eta) - \nabla^0(\xi+\eta) \\ &= \nabla\xi + \nabla\eta - \nabla^0\xi - \nabla^0\eta \\ &= \left(\nabla - \nabla^0\right)\xi + \left(\nabla - \nabla^0\right)\eta \\ &= \alpha(\xi) + \alpha(\eta).\end{aligned}$$

更に, $f \in C^\infty(M)$ とすると,

$$\begin{aligned}\alpha(f\xi) &= \nabla(f\xi) - \nabla^0(f\xi) \\ &= df \otimes \xi + f\nabla\xi - df \otimes \xi - f\nabla^0\xi \\ &= f(\nabla - \nabla^0)\xi \\ &= f\alpha(\xi).\end{aligned}$$

よって,

$$\alpha \in \Gamma(T^*M \otimes \operatorname{End} E).$$

$\square$

接続のあたえられたベクトル束から構成される直和, テンソル積などに自然な接続を考えることができる.
M を C^∞ 級多様体, E, F を M 上のベクトル束, ∇^E を E の接続, ∇^F を F の接続とする.
まず, $E \oplus F$ の接続 $\nabla^{E\oplus F}$ を

$$\nabla^{E\oplus F}(\xi, \eta) = \left(\nabla^E\xi, \nabla^F\eta\right) \quad (\xi \in \Gamma(E),\ \eta \in \Gamma(F))$$

により定めることができる.
次に, $E \otimes F$ の接続 $\nabla^{E\otimes F}$ を

$$\nabla^{E\otimes F}(\xi\otimes\eta) = \nabla^E\xi\otimes\eta + \xi\otimes\nabla^F\eta \quad (\xi \in \Gamma(E),\ \eta \in \Gamma(F))$$

により定めることができる.
更に, E^* の接続 ∇^{E^*} を

$$d\langle\xi^*, \xi\rangle = \left\langle\nabla^{E^*}\xi^*, \xi\right\rangle + \left\langle\xi^*, \nabla^E\xi\right\rangle \quad (\xi \in \Gamma(E),\ \xi^* \in \Gamma(E^*))$$

により定めることができる. ただし, $\langle\ ,\ \rangle$ は双対から定まる内積を表す.
§8 において扱った誘導接続はベクトル束の接続の特別な場合である.
M, N を C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像, E を N 上のベクトル束, π を E から N への射影とする.
このとき,

$$f^*E = \{(p, \xi) \in M \times E | f(p) = \pi(\xi)\}$$

とおくと, f^*E は M 上のベクトル束となる. f^*E の各 $p \in M$ 上のファイバー $(f^*E)_p$ は E の $f(p)$ 上のファイバー $E_{f(p)}$ である. f^*E を f による E の引き戻しまたは誘導束という.

$\xi \in \Gamma(E)$ とし, 各 $p \in M$ に対して $(\xi \circ f)(p) \in (f^*E)_p$ を

$$(\xi \circ f)(p) = \xi_{f(p)}$$

により定める. このとき, $\xi \circ f \in \Gamma(f^*E)$ となる.
更に, ∇ を E の接続とすると, f^*E の接続 ∇^f で, 任意の $\xi \in \Gamma(E)$ および任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla^f_X(\xi \circ f) = \nabla_{f_* X}\xi$$

をみたすものが一意的に存在する. ∇^f を f による ∇ の誘導接続という. E が接ベクトル束の場合は ∇^f は §8 において扱ったものと同じである.
多様体に対しては Riemann 計量という各接空間上の内積を考えることができた. Riemann 計量はベクトル束に対しても考えることができる.

定義 M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束とする. 各 $p \in M$ において E_p の内積

$$g_p : E_p \times E_p \to \mathbf{R}$$

があたえられているとし, p から g_p への対応を g と表す. 任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して, p から $g_p(\xi(p), \eta(p))$ への対応が M 上の C^∞ 級関数を定めるとき, g を E の Riemann 計量という.

注意 ベクトル束 E の Riemann 計量は $E^* \otimes E^*$ の正定値対称な切断と言い替えることもできる.

TM の Riemann 計量は M の Riemann 計量に他ならない.
Riemann 多様体に対する Levi-Civita 接続は Riemann 計量に関して計量的であった. ベクトル束の Riemann 計量に対しても同様の概念を考えることができる.

定義 M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束, ∇ を E の接続, g を E の Riemann 計量とする. 任意の $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して

$$dg(\xi, \eta) = g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta)$$

がなりたつとき, ∇ は g を保つ, または計量的であるという.

注意 上において述べたように, ベクトル束 E の接続 ∇ は自然に $E^* \otimes E^*$ の接続 $\nabla^{E^* \otimes E^*}$ を定める.
実際, $g \in \Gamma(E^* \otimes E^*)$ および $\xi, \eta \in \Gamma(E)$ に対して

$$d(g(\xi, \eta)) = \left(\nabla^{E^* \otimes E^*} g\right)(\xi, \eta) + g(\nabla\xi, \eta) + g(\xi, \nabla\eta)$$

がなりたつように $\nabla^{E^* \otimes E^*}$ を定めればよい.
よって, E の Riemann 計量 g を $E^* \otimes E^*$ の切断とみなすと, ∇ が g に関して計量的であるとは

$$\nabla^{E^* \otimes E^*} g = 0$$

がなりたつということである. この式から ∇ が g に関して計量的であることを g は ∇ に関して平行であるともいう.

関連事項 12. 概複素構造

虚数単位 i は $i^2 = -1$ となる複素数である．多様体の各接空間にこのようなものを与えることを考えてみよう．
M を C^∞ 級多様体, J を M 上の $(1,1)$ 型の C^∞ 級テンソル場で, 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$J^2 X = -X$$

がなりたつものとする．このとき, J を M の概複素構造, 組 (M, J) を概複素多様体という．特に, 概複素多様体の接ベクトル束は関連事項 10 において述べた複素ベクトル束となる．また, 概複素多様体の次元は偶数次元でなければならない．
関連事項 2 において述べた複素多様体は自動的に概複素多様体となる．各接空間が始めから複素構造をもつ複素ベクトル空間となっているからである．では, 逆に概複素多様体の概複素構造はどのような条件の下で複素多様体の複素構造から定まるのであろうか．複素構造から定まる概複素構造は可積分であるという．
(M, J) を概複素多様体とする．$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$N(X,Y) = [X,Y] + J[JX,Y] + J[X,JY] - [JX,JY]$$

とおく．このとき, 任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して

$$N(fX,Y) = N(X,fY) = fN(X,Y)$$

がなりたつことが分かる．よって, N は M 上の $(1,2)$ 型のテンソル場となる．N を Nijenhuis テンソル場という．このとき, J が可積分であることと $N = 0$ となることとは同値であることが分かる．
例えば, 2 次元概複素多様体の概複素構造は常に可積分である．実際,

$$\begin{aligned} N(X,JX) &= [X,JX] + J[JX,JX] + J[X,J^2X] - [JX,J^2X] \\ &= [X,JX] + J[JX,JX] + J[X,-X] - [JX,-X] \\ &= 0 \end{aligned}$$

で, $p \in M$ において $X_p \neq 0$ ならば, $\{X_p, JX_p\}$ は T_pM の基底となるからである．
また, n 次元球面 S^n が概複素構造をもつのは $n = 2, 6$ のときに限ることが知られている．S^6 が可積分な概複素構造をもつかどうかは大きな未解決問題である．
概複素構造の可積分性を接続の言葉を用いて言い替えることができる．すなわち, 概複素多様体 (M, J) の概複素構造 J が可積分であるための必要十分条件は M のアファイン接続 ∇ で

$$\nabla J = T = 0$$

となるものが存在することである．ただし, $J \in \Gamma(T^*M \otimes TM)$ とみなし, ∇ が $T^*M \otimes TM$ に定める自然な接続も ∇ と表している．また, T はアファイン接続 ∇ の振率である．
複素多様体の重要かつ特別な例として Kähler 多様体というものが知られている．Kähler 多様体は概複素構造と両立する Riemann 計量をもち, 概複素構造が Levi-Civita 接続に関して平行となる概複素多様体として特徴付けることができる．