§15. 主ファイバー束の接続

主ファイバー束の接続について述べる前に, ベクトル束の接続について再び考えてみよう.
M を C^∞ 級多様体, E を M 上の階数 r のベクトル束, ∇ を E の接続とする.
E は局所的には M の開集合 U を用いて $U \times \mathbf{R}^r$ と表されるから, U 上で 1 次独立な E の切断 $e_1, e_2, \dots, e_r$ が存在する. よって, $\xi \in \Gamma(E)$ とすると, ξ は U 上では

$$\xi = \sum_{i=1}^{r} \xi_i e_i$$

と一意的に表すことができる. ただし, $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_r$ は U で定義された C^∞ 級関数である.
また, E の切断の共変微分は E に値をとる 1 次微分形式となるから, $i = 1, 2, \dots, r$ とすると,

$$\nabla e_i = \sum_{j=1}^{r} \omega_i^j \otimes e_j$$

と表すことができる. ただし, ω_i^j は U で定義された C^∞ 級 1 次微分形式である.
このとき,

$$\begin{aligned}
\nabla \xi &= \sum_{i=1}^{r} \nabla(\xi_i e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} (d\xi_i \otimes e_i + \xi_i \nabla e_i) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(d\xi_i \otimes e_i + \xi_i \sum_{j=1}^{r} \omega_i^j \otimes e_j \right) \\
&= \sum_{i=1}^{r} \left(d\xi_i + \sum_{j=1}^{r} \omega_j^i \xi_j \right) \otimes e_i.
\end{aligned}$$

したがって, ∇ は局所的には $e_1, e_2, \dots, e_r$ と $(\omega_i^j)_{i,j=1,\dots,r}$ により定まる. 組 $\{e_1, e_2, \dots, e_r\}$ を E の局所標構, $(\omega_i^j)_{i,j=1,\dots,r}$ を ∇ の接続形式という.
$\{\tilde{e}_1, \tilde{e}_2, \dots, \tilde{e}_r\}$ を U で定義されたもう 1 つの局所標構とし, $(\tilde{\omega}_i^j)_{i,j=1,\dots,r}$ を対応する接続形式とする. 2 つの接続形式の関係を調べてみよう.
まず, U で定義された C^∞ 級関数 a_{ij} が存在し,

$$\tilde{e}_i = \sum_{j=1}^{r} a_{ji} e_j$$

と表すことができる.
このとき, 上の計算より,

$$\nabla \tilde{e}_i = \sum_{k=1}^{r} \left(da_{ki} + \sum_{j=1}^{r} \omega_j^k a_{ji} \right) \otimes e_k.$$

一方, 接続形式の定義より,

$$\begin{aligned}
\nabla \tilde{e}_i &= \sum_{j=1}^{r} \tilde{\omega}_i^j \otimes \tilde{e}_j \\
&= \sum_{j,k=1}^{r} \tilde{\omega}_i^j a_{kj} \otimes e_k.
\end{aligned}$$

よって,

$$\sum_{j=1}^{r} \tilde{\omega}_i^j a_{kj} = da_{ki} + \sum_{j=1}^{r} \omega_j^k a_{ji}.$$

更に,

$$a = (a_{ij}), \quad \omega = (\omega_j^i), \quad \tilde{\omega} = (\tilde{\omega}_j^i)$$

とおくと,

$$a\tilde{\omega} = da + \omega a.$$

a は $\mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ に値をとるから, a^{-1} が存在し,

$$\tilde{\omega} = a^{-1}da + a^{-1}\omega a. \tag{$*$}$$

$\omega, \tilde{\omega}$ も接続形式という.
ここで, $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対する変換関数とし, $\alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ とする.
U_α, U_β 上で E はそれぞれ写像 $\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ により $U_\alpha \times \mathbf{R}^r, U_\beta \times \mathbf{R}^r$ と表され, 各 $p \in U_\alpha \cap U_\beta$ に対して

$$\varphi_{\alpha\beta}(p) = \varphi_\alpha(p) \circ \varphi_\beta(p)^{-1}$$

である.
$\varphi_\alpha, \varphi_\beta$ を用いて $\mathbf{R}^r$ の標準基底に対応する局所標構をそれぞれ $\left\{e_1^{(\alpha)}, e_2^{(\alpha)}, \ldots, e_r^{(\alpha)}\right\}$, $\left\{e_1^{(\beta)}, e_2^{(\beta)}, \ldots, e_r^{(\beta)}\right\}$ とする.
このとき, $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

$$\left(e_1^{(\beta)}, e_2^{(\beta)}, \ldots, e_r^{(\beta)}\right) = \left(e_1^{(\alpha)}, e_2^{(\alpha)}, \ldots, e_r^{(\alpha)}\right) \varphi_{\alpha\beta}$$

がなりたつ.
更に, これらの局所標構に対する接続形式をそれぞれ $\omega_\alpha, \omega_\beta$ とすると, $(*)$ において

$$a = \varphi_{\alpha\beta}, \quad \tilde{\omega} = \omega_\beta, \quad \omega = \omega_\alpha$$

とおくことにより,

$$\omega_\beta = \varphi_{\alpha\beta}^{-1} d\varphi_{\alpha\beta} + \varphi_{\alpha\beta}^{-1} \omega_\alpha \varphi_{\alpha\beta} \tag{$**$}$$

を得る.
逆に, 各 U_α 上で 1 次微分形式を成分とする r 次の行列 ω_α があたえられ, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる $\alpha, \beta \in A$ に対しては $(**)$ がなりたっているとする. このとき, E に対して各 U_α 上で接続形式を ω_α とする接続が一意的に存在することが分かる. すなわち, ベクトル束の接続は線形写像 ∇ を用いなくとも, 接続形式を用いて定義することができるのである. また, 接続形式 ω_α は $M_r(\mathbf{R})$ に値をとる 1 次微分形式で, $M_r(\mathbf{R})$ は $\mathrm{GL}(r, \mathbf{R})$ の Lie 環であることにも注意しよう.
では, 上で述べたことを元に主ファイバー束の接続を定義しよう.
M を C^∞ 級多様体, P を構造群を G とする M 上の主ファイバー束, $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ を M の開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対する変換関数とする. $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とし, 簡単のため, G は線形 Lie 群とする.
各 U_α に対して $\mathfrak{g}$ に値をとる C^∞ 級 1 次微分形式 ω_α があたえられ, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる $\alpha, \beta \in A$ に対しては $(**)$ がなりたっているとする.
このとき, $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ から P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 次微分形式を構成することができる.
各 U_α 上で P を局所的に $U_\alpha \times G$ と表しておく.

$U_\alpha \times G$ 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 次微分形式 $\tilde{\omega}_\alpha$ を

$$(\tilde{\omega}_\alpha)_{(p,a)} = a^{-1}da + a^{-1}\omega_\alpha a \quad ((p,a) \in U_\alpha \times G)$$

により定める.
ここで, $\alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ とし, $(p,a) \in U_\alpha \times G$ および $(p,b) \in U_\beta \times G$ が P の同じ点を表しているとすると, $U_\alpha \cap U_\beta$ 上で

$$\begin{aligned}
\tilde{\omega}_\beta &= b^{-1}db + b^{-1}\omega_\beta b \\
&= (\varphi_{\beta\alpha}a)^{-1}d(\varphi_{\beta\alpha}a) + (\varphi_{\beta\alpha}a)^{-1}\omega_\beta\varphi_{\beta\alpha}a \\
&= a^{-1}\varphi_{\beta\alpha}^{-1}\{(d\varphi_{\beta\alpha})a + \varphi_{\beta\alpha}da\} + a^{-1}\varphi_{\beta\alpha}^{-1}\omega_\beta\varphi_{\beta\alpha}a \\
&= a^{-1}\omega_\alpha a + a^{-1}da \\
&= \tilde{\omega}_\alpha.
\end{aligned}$$

よって, $\{\tilde{\omega}_\alpha\}_{\alpha \in A}$ は P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 次微分形式を定める. これを ω と表し, 接続形式という.
ω の性質について述べよう.
まず, G は P の上に右から作用するのであった. $a \in G$ に対してこの作用が定める P から P 自身への写像を R_a と表す.
次に, $A \in \mathfrak{g}$ に対して $A^* \in \mathfrak{X}(P)$ を

$$A^*_u = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} u\exp(tA) \quad (u \in P)$$

により定める. A^* を A に対する基本ベクトル場という.

定理　ω は次の (1), (2) をみたす.
(1) 任意の $a \in G$ に対して $R_a^*\omega = a^{-1}\omega a$.
(2) 任意の $A \in \mathfrak{g}$ に対して $\omega(A^*) = A$.

証明　(1): 接続形式の定義より, 明らか.
(2): $a \in G$ とする.
まず, 各 $\alpha \in A$ に対して ω_α は U_α 上の 1 次微分形式で, A^* はファイバーに沿うベクトル場だから,

$$a^{-1}\omega_\alpha(A^*)a = 0.$$

また,

$$a^{-1}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} a\exp(tA) = A.$$

よって,

$$\omega(A^*) = A.$$

□

逆に, 上の定理の (1), (2) をみたす P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 次微分形式から, $(**)$ をみたす $\{\omega_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を構成することができる. よって, 接続形式 ω は P の接続を定める.

関連事項 15. Maurer-Cartan 形式

Lie 群に対してはその Lie 環に値をとる 1 次微分形式として, Maurer-Cartan 形式という基本的なものを定義することができる.
G を Lie 群, $\mathfrak{g}$ を G の Lie 環とする.
$g \in G$ および $X \in T_g G$ に対して単位元 e における接ベクトル $\omega(X) \in T_e G$ を

$$\omega(X) = (dL_{g^{-1}})_g(X)$$

により定める. ただし, $L_{g^{-1}}$ は g^{-1} による左移動である. このとき, ω は G 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 1 次微分形式となり, 任意の $g \in G$ に対して

$$L_g^* \omega = \omega$$

がなりたつ. すなわち, ω は左不変である. また, $X \in T_e G$ のときは

$$\omega(X) = X$$

である. この ω が Maurer-Cartan 形式である.
$G = \mathrm{GL}\,(r, \mathbf{R})$ のとき, $\mathrm{GL}\,(r, \mathbf{R})$ 上の $M_r(\mathbf{R})$ に値をとる 1 次微分形式として $a^{-1}da$ を考えることができるが, これは左不変である. 実際, $g \in \mathrm{GL}\,(r, \mathbf{R})$ とすると,

$$\begin{aligned}(ga)^{-1}d(ga) &= a^{-1}g^{-1}gda \\ &= a^{-1}da\end{aligned}$$

となるからである. 更に, $X \in M_r(\mathbf{R})$ を単位行列における接ベクトルとすると,

$$(a^{-1}da)(X) = X$$

であるから, $a^{-1}da$ は $\mathrm{GL}\,(r, \mathbf{R})$ の Maurer-Cartan 形式に他ならない.
Lie 環に値をとる微分形式に対しても外微分を考えることができる. このとき, Maurer-Cartan 形式 ω は

$$d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega] = 0$$

をみたすことが分かる. これを G の構造方程式という.
ここで, M を C^∞ 級多様体とし, M 上の主ファイバー束として直積多様体 $M \times G$ を考えよう. M の開被覆として M 自身のみを考えると, Maurer-Cartan 形式は $M \times G$ 上の自明な接続形式を定める. すなわち, 主ファイバー束の接続形式は Lie 群の Maurer-Cartan 形式の一般化とみなすことができるのである.
では, Lie 群の構造方程式はどのように一般化されるのであろうか.
P を構造群を G とする主ファイバー束, ω を P の接続形式とし, P 上の $\mathfrak{g}$ に値をとる 2 次微分形式 Ω を

$$\Omega = d\omega + \frac{1}{2}[\omega \wedge \omega]$$

により定める. このとき, Ω は一般には 0 とはならない. Ω を P の曲率形式といい, 上の式を接続の構造方程式という