

## §5. 測地線

Euclid空間上の異なる2点を結ぶ曲線の中で長さが最短のものは線分である. 一方, 曲線の長さはRiemann多様体の場合にも考えることができる. このとき, 上の線分に相当するものが測地線である.

$(M, g)$  を  $n$ 次元  $C^\infty$ 級 Riemann 多様体とする.

まず, 曲線の長さは径数付けに依存しないことに注意しよう. すなわち,  $I, J$  を有界閉区間,

$$\gamma: I \rightarrow M$$

を  $M$  上の  $C^\infty$  級曲線,  $\varphi$  を  $J$  から  $I$  への単調増加な  $C^\infty$  級関数,  $L(\gamma)$  を  $\gamma$  の長さ,  $L(\gamma \circ \varphi)$  を  $\gamma \circ \varphi$  の長さとする,

$$L(\gamma \circ \varphi) = L(\gamma)$$

である. 実際, 連鎖律と置換積分より,

$$\begin{aligned} L(\gamma \circ \varphi) &= \int_J \sqrt{g_{(\gamma \circ \varphi)(s)} \left( \frac{d(\gamma \circ \varphi)}{ds}, \frac{d(\gamma \circ \varphi)}{ds} \right)} ds \\ &= \int_J \sqrt{g_{\gamma(\varphi(s))} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right) \frac{d\varphi}{ds}} ds \\ &= \int_I \sqrt{g_{\gamma(t)} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right)} dt \\ &= L(\gamma) \end{aligned}$$

である.

ここで,  $I = [a, b]$  とおき,  $\gamma$  は正則, すなわち任意の  $t \in I$  に対して  $\frac{d\gamma}{dt}(t) \neq 0$  であるとする.

上の  $\varphi$  として,  $t \in [a, b]$  に対して  $\gamma$  の  $a$  から  $t$  までの長さ  $\int_a^t \sqrt{g_{\gamma(t)} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right)} dt$  を対応させて得られる関数の逆関数を選んでおく. このとき,

$$\begin{aligned} g_{(\gamma \circ \varphi)(s)} \left( \frac{d(\gamma \circ \varphi)}{ds}, \frac{d(\gamma \circ \varphi)}{ds} \right) &= g_{\gamma(\varphi(s))} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right) \left( \frac{d\varphi}{ds} \right)^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

となる.

更に, この  $\varphi$  を定数倍することにより,  $\gamma$  は始めから  $g_{\gamma(t)} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right)$  が正の定数となるように選んでおくことができる. このような  $\gamma$  を端点を固定したまま変形することを考えよう.

$\varepsilon > 0$  に対して  $C^\infty$  級写像

$$\alpha: [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

が次の (1), (2) をみたすとする.

- (1) 任意の  $t \in [a, b]$  に対して  $\alpha(t, 0) = \gamma(t)$ .
- (2) 任意の  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  に対して  $\alpha(a, s) = \gamma(a)$ ,  $\alpha(b, s) = \gamma(b)$ .

このとき、各  $s \in (-\varepsilon, \varepsilon)$  に対して  $C^\infty$  級曲線

$$\alpha_s : [a, b] \rightarrow M$$

を

$$\alpha_s(t) = \alpha(t, s) \quad (t \in [a, b])$$

により定めることができる.

$g, \alpha, \alpha_s$  を座標近傍を用いて

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^n g_{ij} dx_i \otimes dx_j,$$

$$\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n), \quad \alpha_s = (\alpha_{s,1}, \alpha_{s,2}, \dots, \alpha_{s,n})$$

と表しておき、 $s$  の関数  $L(\alpha_s)$  を微分すると、

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} L(\alpha_s) &= \int_a^b \frac{\partial}{\partial s} \sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{d\alpha_{s,i}}{dt} \frac{d\alpha_{s,j}}{dt}} dt \\ &= \int_a^b \frac{1}{2} \frac{1}{\sqrt{\sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t}}} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial s} \left( g_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \right) dt. \end{aligned}$$

ここで、

$$\frac{\partial}{\partial s} \left( g_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} \right) = \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial s} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + g_{ij} \frac{\partial^2 \alpha_i}{\partial s \partial t} \frac{\partial \alpha_j}{\partial t} + g_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial t} \frac{\partial^2 \alpha_j}{\partial s \partial t}.$$

よつて、 $c = \sqrt{g_{\gamma(t)} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right)}$  とおき、 $\gamma$  も上のように座標近傍を用いて表しておく、部分積分法および (1), (2) より、

$$\begin{aligned} & \frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\alpha_s) \\ &= \frac{1}{c} \int_a^b \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{\partial \alpha_k}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} - \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\gamma_k}{dt} \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{d\gamma_j}{dt} - g_{ij} \frac{\partial \alpha_i}{\partial s} \Big|_{s=0} \frac{d^2 \gamma_j}{dt^2} \right. \\ & \quad \left. - \sum_{k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\gamma_k}{dt} \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{\partial \alpha_j}{\partial s} \Big|_{s=0} - g_{ij} \frac{d^2 \gamma_i}{dt^2} \frac{\partial \alpha_j}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) dt \\ &= -\frac{1}{c} \int_a^b \sum_{k,m=1}^n \left\{ g_{km} \frac{d^2 \gamma_k}{dt^2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \left( \frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right) \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \right\} \frac{\partial \alpha_m}{\partial s} \Big|_{s=0} dt \\ &= -\frac{1}{c} \int_a^b \sum_{k,m=1}^n \left\{ \frac{d^2 \gamma_k}{dt^2} + \frac{1}{2} \sum_{i,j,l=1}^n g^{lk} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right) \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \right\} \frac{\partial \alpha_m}{\partial s} \Big|_{s=0} g_{km} dt. \end{aligned}$$

ただし、 $(g^{ij})$  は  $(g_{ij})$  の逆行列である。 $(g_{ij})$  は正定値実対称行列に値をとることに注意しよう。更に、

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right), \quad \nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = \sum_{k=1}^n \left( \frac{d^2 \gamma_k}{dt^2} + \sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \right) \left( \frac{\partial}{\partial x_k} \right)_{\gamma(t)}$$

とおくと,

$$\frac{d}{ds} \Big|_{s=0} L(\alpha_s) = -\frac{1}{c} \int_a^b g_{\gamma(t)} \left( \nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt}, \frac{\partial \alpha}{\partial s} \Big|_{s=0} \right) dt.$$

なお,  $\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt}$  は well-defined, すなわち座標近傍の選び方に依存しないことが分かる.

固定された端点を結ぶ曲線の中で長さが最短のものに対しては上の値は常に 0 となる.

**定義**  $\nabla_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} = 0$  となる曲線  $\gamma$  を測地線という.

$\gamma$  が測地線ならば,  $g_{\gamma(t)} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right)$  は自動的に定数となる. 実際,

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} g_{\gamma(t)} \left( \frac{d\gamma}{dt}, \frac{d\gamma}{dt} \right) &= \frac{d}{dt} \sum_{i,j=1}^n g_{ij} \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\gamma_k}{dt} \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} + 2 \sum_{k,l=1}^n g_{kl} \frac{d^2 \gamma_k}{dt^2} \frac{d\gamma_l}{dt} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \frac{d\gamma_k}{dt} + 2 \sum_{i,j,k,l=1}^n g_{kl} \left( -\Gamma_{ij}^k \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \right) \frac{d\gamma_l}{dt} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \frac{d\gamma_k}{dt} \\ &\quad - \sum_{i,j,k,l,m=1}^n g_{kl} g^{mk} \left( \frac{\partial g_{mj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{im}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_m} \right) \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \frac{d\gamma_l}{dt} \\ &= \sum_{i,j,k=1}^n \left( \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial x_i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial x_j} + \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) \frac{d\gamma_i}{dt} \frac{d\gamma_j}{dt} \frac{d\gamma_k}{dt} \\ &= 0 \end{aligned}$$

となるからである.

**例** §3 において扱ったように,  $\mathbf{R}^n$  の Riemann 計量は

$$ds^2 = \sum_{i=1}^n (dx_i)^2$$

と表すことができる.

よって, 測地線の方程式, すなわち測地線のみたす微分方程式は

$$\frac{d^2 \gamma_k}{dt^2} = 0 \quad (k = 1, 2, \dots, n)$$

したがって, 測地線は直線の一部である.

**例**  $S^n$  を

$$S^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} | x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\}$$

と表しておき,  $S^n$  から  $\mathbf{R}^{n+1}$  へのはめ込みによる誘導計量を考える.

このとき,  $S^n$  の測地線は大円の一部分であることが分かる.

### 関連事項 5. Riemann 多様体の指数写像

§2 において Lie 群の指数写像について述べたが、指数写像は Riemann 多様体に対しても考えることができる。

$(M, g)$  を  $C^\infty$  級 Riemann 多様体とする。常微分方程式の解の存在と一意性より、任意の  $p \in M$  と任意の  $v \in T_p M$  に対して、ある  $\varepsilon > 0$  が存在し、

$$\gamma_v(0) = p, \quad \gamma'_v(0) = v$$

となる測地線

$$\gamma_v : [0, \varepsilon] \rightarrow M$$

が一意的に存在する。  $\gamma_v$  が  $[0, 1]$  で定義されるとき、

$$\exp_p v = \gamma_v(1)$$

とおき、  $\exp_p$  を  $p$  における指数写像という。  $\exp_p$  は  $T_p M$  の原点の近傍から  $M$  への写像である。逆写像定理より、  $\exp_p$  は  $T_p M$  の原点の近傍から  $p$  の近傍への  $C^\infty$  級微分同相写像となることが分かる。

Riemann 多様体の指数写像は Lie 群の指数写像と無関係ではない。  $G$  をコンパクト Lie 群とする。例えば、  $O(n), SO(n), T^n$  はコンパクト Lie 群である。このとき、  $G$  の Riemann 計量  $g$  で、任意の  $h \in G$  に対して  $h$  による左移動および右移動による  $g$  の誘導計量が  $g$  に一致するものが存在する。これを両側不変計量という。なお、左移動については §2 において述べたが、  $h$  による右移動は

$$R_h(x) = xh \quad (x \in G)$$

により定まる  $G$  から  $G$  への  $C^\infty$  級微分同相写像である。両側不変計量を考えると、

$$(\exp X)x = \exp_x X \quad (X \in \mathfrak{g}, x \in G)$$

がなりたつことが分かる。左辺の  $\exp$  は Lie 群としての指数写像で、右辺の  $\exp$  は Riemann 多様体としての指数写像である。

再び、Riemann 多様体  $(M, g)$  へ話を戻そう。指数写像を用いると、上の定義に現れた測地線は

$$\gamma(t) = \exp_p(tv)$$

と表すことができる。ただし、一般には  $t$  は 0 の近傍でしか考えることはできない。任意の  $p \in M$  と任意の  $v \in T_p M$  および任意の  $t \in \mathbf{R}$  に対して  $\exp_p(tv)$  が定義できるとき、  $(M, g)$  は測地的完備であるという。

Riemann 多様体は曲線の長さを用いることにより、距離空間となる。距離  $d$  は  $p, q \in M$  に対して

$$d(p, q) = \inf \{ \gamma \text{ の長さ} \mid \gamma \text{ は } \gamma(a) = p, \gamma(b) = q \text{ となる } [a, b] \text{ で定義された } M \text{ 上の } C^\infty \text{ 級曲線} \}$$

とおけばよい。このとき、  $(M, g)$  が測地的完備であることと任意の  $p, q$  に対して長さが  $d(p, q)$  に一致する  $p$  と  $q$  を結ぶ測地線が存在することが同値であることが分かる。これは Hopf-Rinow の定理として知られている。

また、測地的完備性は距離空間としての完備性や有界閉集合のコンパクト性とも同値である。この事実も Hopf-Rinow の定理である。