§8. 正規直交標構

平面曲線または空間曲線を考える際に現れる Frenet の標構は各点において $\mathbf{R}^2$ または $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底をあたえる. 曲面の場合にもこのようなものを考えよう.
曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

に対して 3 つの写像

$$e_1, e_2, e_3 : D \to \mathbf{R}^3$$

を次の (1)〜(3) をみたすように選んでおく.

(1) 任意の $(u,v) \in D$ に対して $\{e_1(u,v), e_2(u,v), e_3(u,v)\}$ は $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底.

(2) 任意の $(u,v) \in D$ に対して $p(u,v) + e_1(u,v)$ および $p(u,v) + e_2(u,v)$ は $p(u,v)$ における接平面上にある.

(3) $e_3 = e_1 \times e_2$ で, 更に e_3 は p の単位法ベクトル.

組 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を正規直交標構という.
このとき, D で定義されたある関数 $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ が存在し,

$$p_u = a_{11}e_1 + a_{12}e_2,\ p_v = a_{21}e_1 + a_{22}e_2.$$

ここで,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \times (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \times e_2 \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_3 \\ &= \frac{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}{\|p_u \times p_v\|} p_u \times p_v \end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned} a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} &= \|p_u \times p_v\| \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって,

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

とおくと, A は行列式が正の 2 次の正方行列に値をとる関数となる.
ここで,

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

を p の第一基本形式とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} \left({}^t p_u, {}^t p_v\right) \\ &= A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \left({}^t e_1, {}^t e_2\right) {}^t A \\ &= A \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} {}^t A \\ &= A {}^t A. \end{aligned}$$

p 上の曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(t) = p(u(t), v(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておくと,

$$\begin{aligned}
\|\dot\gamma\|^2 &= E(\dot u)^2 + 2F\dot u\dot v + G(\dot v)^2 \\
&= (\dot u, \dot v)\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} \\
&= (\dot u, \dot v)A^tA\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって,

$$\theta = (\dot u, \dot v)A$$

とおくと,

$$\|\dot\gamma\|^2 = \theta^t\theta.$$

また,

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

を p の第二基本形式とすると,

$$\begin{aligned}
\langle \ddot\gamma, e_3\rangle &= L(\dot u)^2 + 2M\dot u\dot v + N(\dot v)^2 \\
&= (\dot u, \dot v)\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \dot u \\ \dot v \end{pmatrix} \\
&= \theta A^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}{}^t\left(\theta A^{-1}\right) \\
&= \theta A^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}{}^tA^{-1t}\theta.
\end{aligned}$$

よって,

$$B = A^{-1}\begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}{}^tA^{-1}$$

とおくと, B は実対称行列に値をとる関数で,

$$\langle \ddot\gamma, e_3\rangle = \theta B^t\theta.$$

正規直交標構の選び方は一意的ではない. $\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3$ も p の正規直交標構とするとき, 上の B がどのように変わるのかを調べてみよう.
正規直交標構の定義より,

$$e_3 = \overline{e}_3$$

で, ある写像

$$T : D \to \mathrm{SO}(2)$$

が存在し

$$\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{pmatrix}$$

と表される. ただし, SO(2) は行列式が 1 の 2 次の直交行列全体の集合である.
よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} &= A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} \\ &= AT \begin{pmatrix} \overline{e}_1 \\ \overline{e}_2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

すなわち, 上の行列値関数 A は正規直交標構を取り替えることにより AT となる.
更に,

$$\begin{aligned} (AT)^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t(AT)^{-1} &= T^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t\left(T^{-1}A^{-1}\right) \\ &= T^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^tA^{-1t}T^{-1} \\ &= T^{-1}BT. \end{aligned}$$

すなわち, 上の行列値関数 B は正規直交標構を取り替えることにより $T^{-1}BT$ となる.
したがって, B の固有値, 行列式, トレースは正規直交標構の選び方に依らずに定まる.
例えば,

$$\begin{aligned} \det B &= \left| A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^tA^{-1} \right| \\ &= \left| {}^tA^{-1}A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \left(A^tA\right)^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \right| \\ &= \left| \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \right| \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} \\ &= \begin{vmatrix} E & F \\ F & G \end{vmatrix}^{-1} \begin{vmatrix} L & M \\ M & N \end{vmatrix} \\ &= \frac{LN - M^2}{EG - F^2}. \end{aligned}$$

これは p の Gauss 曲率である.

問題 8

1. 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

に対する正規直交標構を $\{e_1, e_2, e_3\}$ とし,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

と表しておく. また,

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

を p の第二基本形式とし,

$$B = A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t A^{-1}$$

とおく. p の平均曲率は $\dfrac{1}{2} \mathrm{tr}\, B$ に等しいことを示せ.

2. $a > 0$ とする. 原点中心, 半径 a の球面の一部

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, a \sin u \sin v, a \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定め,

$$\begin{cases} e_1 = (\cos u \cos v, \cos u \sin v, -\sin u), \\ e_2 = (-\sin v, \cos v, 0), \\ e_3 = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u) \end{cases}$$

とおく. このとき, $\{e_1, e_2, e_3\}$ は p に対する正規直交標構となる. また,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}$$

と表しておく.

(1) A を求めよ.

(2) 問題 7 においても扱ったように, p の第二基本形式は

$$-adu^2 - a \sin^2 u dv^2$$

によりあたえられる. 2 次の正方行列に値をとる関数 B を

$$B = A^{-1} \begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a \sin^2 u \end{pmatrix} {}^t A^{-1}$$

により定め, $\det B$ および $\dfrac{1}{2} \mathrm{tr}\, B$ をそれぞれ計算することにより, p の Gauss 曲率および平均曲率を求めよ.

問題 8 の解答

1. p の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とすると,

$$\begin{aligned}
\operatorname{tr} B &= \operatorname{tr} A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} {}^t A^{-1} \\
&= \operatorname{tr} {}^t A^{-1} A^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr} \left(A^t A\right)^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\
&= \operatorname{tr} \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \\
&= \frac{GL - FM - FM + EN}{EG - F^2} \\
&= \frac{EN + GL - 2FM}{EG - F^2}.
\end{aligned}$$

よって, p の平均曲率は $\dfrac{1}{2}\operatorname{tr} B$ に等しい.

2. (1) まず,

$$p_u = (a\cos u\cos v, a\cos u\sin v, -a\sin u),\ \ p_v = (-a\sin u\sin v, a\sin u\cos v, 0).$$

よって,

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a\cos u\cos v & a\cos u\sin v & -a\sin u \\ -a\sin u\sin v & a\sin u\cos v & 0 \end{pmatrix} \\
&= A \begin{pmatrix} \cos u\cos v & \cos u\sin v & -\sin u \\ -\sin v & \cos v & 0 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\sin u \end{pmatrix}.$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}
A^{-1} &= \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a\sin u \end{pmatrix}^{-1} \\
&= \frac{1}{a^2\sin u} \begin{pmatrix} a\sin u & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a\sin u} \begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
B &= \frac{1}{a\sin u}\begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -a & 0 \\ 0 & -a\sin^2 u \end{pmatrix}\frac{1}{a\sin u}\begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{a^2\sin^2 u}\begin{pmatrix} -a\sin u & 0 \\ 0 & -a\sin^2 u \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \sin u & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} -\dfrac{1}{a} & 0 \\ 0 & -\dfrac{1}{a} \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

したがって, p の Gauss 曲率は

$$\det B = \frac{1}{a^2}.$$

また, p の平均曲率は

$$\frac{1}{2}\operatorname{tr} B = -\frac{1}{a}.$$