§9. 等温座標系

ここでは, 曲面に対して等温座標系というものを用いて特別な径数付けを考える.

定義　曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の第一基本形式が

$$E(du^2 + dv^2)$$

と表されるとき, (u, v) を等温座標系という.

例　平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (x(t), y(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておき, 柱面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times \mathbf{R},$$

$$p(u, v) = (x(u), y(u), v) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.
§4 において扱ったように, p の第一基本形式は

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)du^2 + dv^2$$

である.
特に, γ が弧長により径数付けられているとき, p の第一基本形式は

$$du^2 + dv^2$$

となるから, (u, v) は等温座標系である.

どのような曲面に対しても必要ならば径数付けを取り替えることにより, 局所的には等温座標系が存在することが知られている. ここでは回転面の場合にこの事実が正しいことを示そう.

定理　任意の回転面に対して等温座標系が存在する.

証明　平面曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

を

$$\gamma(t) = (f(t), g(t)) \quad (t \in I)$$

と表しておく. ただし, f は常に正であるとする.
このとき, 回転面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = I \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = (f(u)\cos v, f(u)\sin v, g(u)) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.
問題 4 において扱ったように, p の第一基本形式は

$$\left\{(f'(u))^2+(g'(u))^2\right\}du^2+(f(u))^2dv^2$$

である.
ここで, 変数変換 Φ を

$$\Phi(u,v)=(\xi,\eta),\ \xi=\int\frac{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}{f(u)}du,\ \eta=v$$

により定め,

$$\tilde{p}=p\circ\Phi^{-1}$$

とおく.
$p=\tilde{p}\circ\Phi$ だから, 合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}p_u\\p_v\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}\xi_u&\eta_u\\\xi_v&\eta_v\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}_\xi\\\tilde{p}_\eta\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}h&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tilde{p}_\xi\\\tilde{p}_\eta\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

ただし,

$$h(u)=\frac{\sqrt{(f'(u))^2+(g'(u))^2}}{f(u)}.$$

よって,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\tilde{p}_\xi\\\tilde{p}_\eta\end{pmatrix}&=\begin{pmatrix}h&0\\0&1\end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix}p_u\\p_v\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{h}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_u\\p_v\end{pmatrix}\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix}\tilde{p}_\xi\\\tilde{p}_\eta\end{pmatrix}\left({}^t\tilde{p}_\xi,{}^t\tilde{p}_\eta\right)&=\begin{pmatrix}\frac{1}{h}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p_u\\p_v\end{pmatrix}\left({}^tp_u,{}^tp_v\right)\begin{pmatrix}\frac{1}{h}&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}\frac{1}{h}&0\\0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}(f'(u))^2+(g'(u))^2&0\\0&(f(u))^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1}{h}&0\\0&1\end{pmatrix}\\&=\begin{pmatrix}(f(u))^2&0\\0&(f(u))^2\end{pmatrix}.\end{aligned}$$

したがって, $\tilde{p}$ の第一基本形式は

$$(f(u))^2(d\xi^2+d\eta^2)$$

となるから, (ξ,η) は等温座標系. □

(u, v) を曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の等温座標系,

$$E(du^2 + dv^2)$$

を p の第一基本形式とする.
このとき,

$$\langle p_u, p_u \rangle = \langle p_v, p_v \rangle, \ \langle p_u, p_v \rangle = 0.$$

第 1 式の両辺を u で微分すると,

$$\langle p_{uu}, p_u \rangle = \langle p_{vu}, p_v \rangle.$$

第 2 式の両辺を v で微分すると,

$$\langle p_{uv}, p_v \rangle + \langle p_u, p_{vv} \rangle = 0.$$

よって,

$$\langle p_{uu} + p_{vv}, p_u \rangle = 0.$$

同様に,

$$\langle p_{uu} + p_{vv}, p_v \rangle = 0.$$

ここで,

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

を p の第二基本形式, H を p の平均曲率とすると,

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN + EL - 2 \cdot 0 \cdot M}{2(E^2 - 0^2)} \\ &= \frac{L + N}{2E} \end{aligned}$$

だから, ν を p の単位法ベクトルとすると,

$$\begin{aligned} \langle p_{uu} + p_{vv}, \nu \rangle &= L + N \\ &= 2EH. \end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{1}{E}(p_{uu} + p_{vv}) = 2H\nu.$$

この式の左辺に現れる

$$\frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

を Laplacian といい, Δ と表す. Laplacian は曲面で定義された関数に対して, 再び曲面で定義された関数を対応させる偏微分作用素というもので, 曲面の径数付けに依らずに定まる.
また, 未知関数 f に対する偏微分方程式

$$\Delta f = 0$$

を Laplace 方程式といい, Laplace 方程式の解は調和であるという. 特に, 曲面が極小となるための必要十分条件は曲面の各成分が調和となることである.

問題 9

1. $a > 0$ とし, カテノイド

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = \mathbf{R} \times [0, 2\pi],$$

$$p(u, v) = (a \cosh u \cos v, a \cosh u \sin v, au) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.

(1) (u, v) は等温座標系であることを示せ.

(2) p の各成分の Laplacian を計算することにより, カテノイド p は極小であることを示せ.

2. $a > 0$ とし, 円柱

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を

$$D = [0, 2\pi] \times \mathbf{R},$$

$$p(u, v) = \left(a \cos \frac{u}{a}, a \sin \frac{u}{a}, v \right) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める. §4 において扱ったことから分かるように, p の第一基本形式は

$$du^2 + dv^2$$

だから, (u, v) は等温座標系で, p の単位法ベクトルは

$$\left(\cos \frac{u}{a}, \sin \frac{u}{a}, 0 \right)$$

である. p の各成分の Laplacian を計算することにより, 円柱 p の平均曲率を求めよ.

3. $\mathbf{R}^2$ の領域で定義された関数 $f(u, v)$ に対して, f の Laplacian Δf は

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial u^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}$$

により定められる.

$a, b, c, d, e \in \mathbf{R}$ とすると, $\mathbf{R}^2$ で定義された関数

$$f(u, v) = au^2 + 2buv - av^2 + cu + dv + e$$

は調和であることを示せ.

4. $\mathbf{R}^2$ の領域で定義された関数 $w = f(u, v)$ と極座標変換 $u = r \cos \theta$, $v = r \sin \theta$ の合成関数を考える.

(1) 等式

$$\Delta w = \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2}$$

がなりたつことを示せ.

(2) $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義された関数

$$w = \frac{u}{u^2 + v^2}$$

は調和であることを示せ.

問題 9 の解答

1. (1) p は回転面だから, 第一基本形式は

$$\begin{aligned}
&\left[\{(a\cosh u)_u\}^2+\{(au)_u\}^2\right]du^2+(a\cosh u)^2dv^2\\
&\quad=a^2(\sinh^2 u+1)du^2+a^2\cosh^2 u dv^2\\
&\quad=(a^2\cosh^2 u)(du^2+dv^2).
\end{aligned}$$

よって, (u,v) は等温座標系.

(2) まず,

$$p_u=(a\sinh u\cos v, a\sinh u\sin v, a)$$

だから,

$$p_{uu}=(a\cosh u\cos v, a\cosh u\sin v, 0).$$

また,

$$p_v=(-a\cosh u\sin v, a\cosh u\cos v, 0)$$

だから,

$$p_{vv}=(-a\cosh u\cos v, -a\cosh u\sin v, 0).$$

よって,

$$p_{uu}+p_{vv}=0.$$

したがって, p の各成分の Laplacian は恒等的に 0 となるから, p は極小.

2. まず,

$$p_u=\left(-\sin\frac{u}{a}, \cos\frac{u}{a}, 0\right)$$

だから,

$$p_{uu}=\left(-\frac{1}{a}\cos\frac{u}{a}, -\frac{1}{a}\sin\frac{u}{a}, 0\right).$$

また,

$$p_v=(0,0,1)$$

だから,

$$p_{vv}=0.$$

よって, ν を p の単位法ベクトルとすると,

$$p_{uu}+p_{vv}=-\frac{1}{a}\nu.$$

したがって, p の平均曲率は $-\dfrac{1}{2a}$.

3. まず,

$$\frac{\partial f}{\partial u}=2au+2bv+c,\ \frac{\partial^2 f}{\partial u^2}=2a.$$

また,

$$\frac{\partial f}{\partial v}=2bu-2av+d,\ \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}=-2a.$$

よって,

$$\Delta f=0.$$

4. (1) まず,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial u}\cos\theta + \frac{\partial w}{\partial v}\sin\theta.$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} &= \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cos\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}\sin\theta\right)\cos\theta + \left(\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\cos\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\sin\theta\right)\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}\cos^2\theta + 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}\sin^2\theta.\end{aligned}$$

また,

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{\partial w}{\partial u}r\sin\theta + \frac{\partial w}{\partial v}r\cos\theta.$$

よって,

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} &= -\left(-\frac{\partial^2 w}{\partial u^2}r\sin\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial v \partial u}r\cos\theta\right)r\sin\theta - \frac{\partial w}{\partial u}r\cos\theta \\ &\quad + \left(-\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}r\sin\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}r\cos\theta\right)r\cos\theta - \frac{\partial w}{\partial v}r\sin\theta \\ &= \frac{\partial^2 w}{\partial u^2}r^2\sin^2\theta - 2\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v}r^2\cos\theta\sin\theta + \frac{\partial^2 w}{\partial v^2}r^2\cos^2\theta \\ &\quad - \frac{\partial w}{\partial u}r\cos\theta - \frac{\partial w}{\partial v}r\sin\theta.\end{aligned}$$

したがって,

$$\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = \Delta w.$$

(2) 極座標変換を用いると,

$$w = \frac{\cos\theta}{r}.$$

よって,

$$\frac{\partial w}{\partial r} = -\frac{\cos\theta}{r^2},\ \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} = 2\frac{\cos\theta}{r^3},\ \frac{\partial w}{\partial \theta} = -\frac{\sin\theta}{r},\ \frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} = -\frac{\cos\theta}{r}.$$

したがって,

$$\begin{aligned}\Delta w &= \frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 w}{\partial \theta^2} \\ &= 0.\end{aligned}$$