§10. 積分可能条件

曲面論において現れる微分方程式の多くは偏微分方程式であるが, これらは常微分方程式の場合と異なり, 線形なものであったとしても任意の初期値問題に対して解がいつでも存在するとは限らない. 解が存在するためには積分可能条件というものをみたす必要がある.
$A = A(u, v)$, $B = B(u, v)$ を n 次の正方行列に値をとる関数とし, $\mathbf{R}^n$ に値をとる未知関数 $f = f(u, v)$ に対する連立線形偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = fA, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = fB \end{cases} \tag{$*$}$$

を考える.
f を $(*)$ の解とすると,

$$\begin{aligned} f_{uv} &= (fA)_v \\ &= f_v A + f A_v \\ &= fBA + fA_v. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} f_{vu} &= (fB)_u \\ &= f_u B + f B_u \\ &= fAB + fB_u. \end{aligned}$$

ここで, $f_{uv} = f_{vu}$ だから,

$$fBA + fA_v = fAB + fB_u.$$

すなわち,

$$f(A_v - B_u - AB + BA) = 0.$$

よって, 任意の初期条件に対して $(*)$ が解をもつと仮定すると,

$$A_v - B_u - AB + BA = O. \tag{$**$}$$

$(**)$ を $(*)$ の積分可能条件という. 特に, $n = 1$ のとき, 積分可能条件は

$$A_v = B_u$$

となる.
$(*)$ の初期値問題は積分可能条件 $(**)$ がなりたつとき, 局所的に一意的に解くことができる.
実際には $(*)$ の初期値問題は関数の定義域が単連結であるとき, 解くことができる.

定義　D を $\mathbf{R}^2$ の領域とする. 像が D に含まれる任意の平面閉曲線

$$\gamma : I \to \mathbf{R}^2$$

に対して, 像が D に含まれるある写像

$$F : I \times [0, 1] \to \mathbf{R}^2$$

が存在し, 任意に $s \in [0,1]$ を固定するごとに $F(t,s)$ は閉曲線で, 任意の $t \in I$ に対して

$$F(t,0)=\gamma(t)$$

で, 更に $F(t,1)$ が 1 点となるとき, D は単連結であるという.

領域が単連結であるとは大雑把に言えば, 穴が空いていないということである. 例えば, 円板や長方形で表される領域は単連結である.
さて, $(u_0,v_0) \in \mathbf{R}^2$ および $x_0 \in \mathbf{R}^n$ を固定しておき, 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dg}{du} = gA(u,v_0) \\ g(u_0)=x_0 \end{cases}$$

を考える.
常微分方程式の解の存在と一意性より, 上の初期値問題の解 g が一意的に存在する. これを $g=g(u,v_0)$ と表す.
次に, u_1 を u_0 に近い点とし, 常微分方程式の初期値問題

$$\begin{cases} \dfrac{dh}{dv} = hB(u_1,v), \\ h(v_0)=g(u_1,v_0) \end{cases}$$

を考える.
常微分方程式の解の存在と一意性より, 上の初期値問題の解 h が一意的に存在する. これを $h=h(u_1,v)$ と表す.
このとき, (u_0,v_0) の近くで定義された関数 f を

$$f(u,v)=h(u,v)$$

により定めると, f は $(*)$ の第 2 式をみたし,

$$f(u_0,v_0)=x_0.$$

更に, $(**)$ がなりたつと仮定すると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial v}(f_u - fA) &= f_{uv} - (fA)_v \\ &= f_{vu} - f_vA - fA_v \\ &= (fB)_u - fBA - fA_v \\ &= f_uB + fB_u - fBA - fA_v \\ &= (f_u - fA)B. \end{aligned}$$

よって, $f_u - fA$ も $(*)$ の第 2 式をみたす.
ここで, $f(u,v_0)=g(u,v_0)$ だから

$$(f_u - fA)(u,v_0)=0.$$

したがって, 常微分方程式の解の一意性より

$$f_u - fA = 0.$$

すなわち, f は $(*)$ の第 1 式もみたす.
A, B および f の定義域が単連結でない場合は, 積分可能条件 $(**)$ がみたされても $(*)$ の初期値問題は解をもたないことがある.

例 $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義された 2 変数の実数値関数 f を未知関数とする連立線形偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = -\dfrac{v}{u^2+v^2} f, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{u}{u^2+v^2} f \end{cases}$$

を考える.
なお, $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ は単連結ではない. 原点中心の円は原点を通らずに 1 点に縮めることができないからである.
このとき,

$$\begin{aligned} \left(-\frac{v}{u^2+v^2}\right)_v - \left(\frac{u}{u^2+v^2}\right)_u &= -\frac{1\cdot(u^2+v^2) - v\cdot 2v}{(u^2+v^2)^2} - \frac{1\cdot(u^2+v^2) - u\cdot 2u}{(u^2+v^2)^2} \\ &= 0 \end{aligned}$$

だから, 上の偏微分方程式は積分可能条件をみたす.
ここで, $(u_0, v_0) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ を固定しておき, $f(u_0, v_0) \neq 0$ となる上の偏微分方程式の解 f が存在すると仮定する
常微分方程式の解の一意性より, f は $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ 全体で 0 とはならないから, $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義された関数 g を

$$g(t) = \log|f(\cos t, \sin t)| \quad (t \in [0, 2\pi])$$

により定めることができる.
このとき,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dg}{dt} dt &= [g(t)]_0^{2\pi} \\ &= g(2\pi) - g(0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

一方, 合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned} \frac{dg}{dt} &= \frac{f_u}{f}(\cos t)' + \frac{f_v}{f}(\sin t)' \\ &= -\frac{\sin t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t + \sin^2 t}(\cos t) \\ &= 1. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} \frac{dg}{dt} dt &= \int_0^{2\pi} dt \\ &= 2\pi. \end{aligned}$$

これは矛盾.
したがって, $f(u_0, v_0) \neq 0$ となる上の偏微分方程式の解は存在しない.

問題 10

1. Gauss の公式

$$\begin{cases} p_{uu} = \Gamma^u_{uu} p_u + \Gamma^v_{uu} p_v + L\nu, \\ p_{uv} = \Gamma^u_{uv} p_u + \Gamma^v_{uv} p_v + M\nu, \\ p_{vu} = \Gamma^u_{vu} p_u + \Gamma^v_{vu} p_v + M\nu, \\ p_{vv} = \Gamma^u_{vv} p_u + \Gamma^v_{vv} p_v + N\nu \end{cases}$$

および Weingarten の公式

$$\begin{cases} \nu_u = \dfrac{FM-GL}{EG-F^2} p_u + \dfrac{FL-EM}{EG-F^2} p_v, \\ \nu_v = \dfrac{FN-GM}{EG-F^2} p_u + \dfrac{FM-EN}{EG-F^2} p_v \end{cases}$$

を 3 次の正方行列に値をとる関数 $f = \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \\ \nu \end{pmatrix}$ を未知関数とする連立線形偏微分方程式で表せ.

2. $a = a(u,v)$, $b = b(u,v)$ を実数値関数とする. $\mathbf{R}^2$ に値をとる未知関数 $f = f(u,v)$ に対する連立線形偏微分方程式

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = f \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = f \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

の積分可能条件を求めよ.

3. $(u,v) \in \mathbf{R}^2$, $u \neq 0$ に対して

$$f(u,v) = \exp \tan^{-1} \frac{v}{u}$$

とおくと,

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = -\dfrac{v}{u^2+v^2} f, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = \dfrac{u}{u^2+v^2} f \end{cases}$$

がなりたつことを示せ.

4. n 次の正方行列 A, B に対して $[A,B] = AB - BA$ とおく. $[A,B]$ を A と B の交換子積という. 次の (1)〜(3) がなりたつことを示せ.
(1) $[A,B] = -[B,A]$.
(2) $[A,A] = O$.
(3) $[[A,B],C] + [[B,C],A] + [[C,A],B] = O$. この等式を Jacobi の恒等式という.

問題 10 の解答

1. 3 次の正方行列に値をとる関数 A, B を

$$A = \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uu}^v & L \\ \Gamma_{vu}^u & \Gamma_{vu}^v & M \\ \dfrac{FM-GL}{EG-F^2} & \dfrac{FL-EM}{EG-F^2} & 0 \end{pmatrix}, \ B = \begin{pmatrix} \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{uv}^v & M \\ \Gamma_{vv}^u & \Gamma_{vv}^v & N \\ \dfrac{FN-GM}{EG-F^2} & \dfrac{FM-EN}{EG-F^2} & 0 \end{pmatrix}$$

により定めると, 求める連立線形偏微分方程式は

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial u} = Af, \\ \dfrac{\partial f}{\partial v} = Bf. \end{cases}$$

2. まず,

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}_v - \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}_u - \begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & b \\ -b & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_v \\ -a_v & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & b_u \\ -b_u & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -ab & 0 \\ 0 & -ab \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & a_v - b_u \\ -a_v + b_u & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって, 求める積分可能条件は

$$a_v = b_u.$$

3. 合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned} f_u &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}\left(-\frac{v}{u^2}\right)\exp\tan^{-1}\frac{v}{u} \\ &= -\frac{v}{u^2+v^2}f. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} f_v &= \frac{1}{1+\left(\dfrac{v}{u}\right)^2}\frac{1}{u}\exp\tan^{-1}\frac{v}{u} \\ &= \frac{u}{u^2+v^2}f. \end{aligned}$$

4. (1) 左辺を計算すると,

$$\begin{aligned} [A,B] &= AB - BA \\ &= -(BA - AB) \\ &= -[B,A]. \end{aligned}$$

(2) 左辺を計算すると,

$$\begin{aligned} [A,A] &= AA - AA \\ &= O. \end{aligned}$$

(3) 左辺を計算すると,

$$
\begin{aligned}
&[[A,B],C]+[[B,C],A]+[[C,A],B] \\
&\quad = [AB-BA,C]+[BC-CB,A]+[CA-AC,B] \\
&\quad = (AB-BA)C-C(AB-BA)+(BC-CB)A-A(BC-CB) \\
&\qquad +(CA-AC)B-B(CA-AC) \\
&\quad = ABC-BAC-CAB+CBA+BCA-CBA-ABC+ACB \\
&\qquad +CAB-ACB-BCA+BAC \\
&\quad = O.
\end{aligned}
$$