§12. Theorema Egregium

§7 において扱ったように, 曲面の Gauss 曲率は元々は第一基本形式と第二基本形式を用いて定義されるものであった. ところが Gauss の方程式より, Gauss 曲率は第一基本形式のみから定まることが分かる. これが大数学者 Gauss が Theorema Egregium とよんで驚嘆した事実である.
(u, v) を曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の等温座標系,

$$E(du^2 + dv^2),\ \ Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

をそれぞれ p の第一基本形式, 第二基本形式とし,

$$E = e^{2\sigma}$$

と表しておく.
このとき, §11 において示したように, Gauss-Codazzi の方程式

$$\begin{cases} \sigma_{uu} + \sigma_{vv} + e^{-2\sigma}(LN - M^2) = 0, \\ L_v - M_u = \sigma_v(L + N), \\ N_u - M_v = \sigma_u(L + N) \end{cases}$$

がなりたつ.
K を p の Gauss 曲率とすると, Gauss 曲率の定義および Gauss の方程式より,

$$\begin{aligned} K &= \frac{LN - M^2}{e^{2\sigma}e^{2\sigma} - 0^2} \\ &= -\frac{1}{e^{2\sigma}}(\sigma_{uu} + \sigma_{vv}) \\ &= -\Delta\sigma \\ &= -\frac{1}{2}\Delta \log E. \end{aligned}$$

ただし, Δ は §9 の最後においても現れた, 曲面 p に対する Laplacian である.
第一基本形式が

$$Edu^2 + 2Mdudv + Ldv^2$$

と表される場合も Gauss 曲率は E, F, G およびそれらの 2 階までの偏導関数を用いて表すことができる. ただし, その式はかなり複雑である.
よって, 次がなりたつ.

Theorema Egregium　曲面の Gauss 曲率は第一基本形式のみに依存する.

平均曲率については Gauss 曲率の場合とは異なり, 第一基本形式のみで表すことはできない.
H を曲面 p の平均曲率とし, 上のように等温座標系を用いると,

$$\begin{aligned} H &= \frac{EN + EL - 2 \cdot 0 \cdot M}{2(E^2 - 0^2)} \\ &= \frac{L + N}{2E} \\ &= \frac{1}{2}e^{-2\sigma}(L + N). \end{aligned}$$

例　柱面の第一基本形式, 第二基本形式はそれぞれ

$$du^2 + dv^2,\ (x''y' - x'y'')du^2$$

と表すことができる. ただし, x, y は u のみの関数で,

$$(x')^2 + (y')^2 = 1$$

である.
Gauss 曲率は元々の定義を用いると,

$$\frac{(x''y' - x'y'') \cdot 0 - 0^2}{1 \cdot 1 - 0^2} = 0.$$

一方, 第一基本形式のみを用いて計算すると, Gauss 曲率は

$$-\Delta 0 = 0.$$

また, 平面

$$p : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^3$$

を

$$p(u, v) = (u, v, 0) \quad ((u, v) \in \mathbf{R}^2)$$

により定めると, 簡単な計算により, p の第一基本形式, 第二基本形式はそれぞれ

$$du^2 + dv^2,\ 0$$

で, Gauss 曲率は 0 となる.

第一基本形式は Riemann 計量というものへ一般化することができる.
$\mathbf{R}^2$ の領域 D に対して

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

というものを考える. ただし, E, F, G は D 全体で

$$E, G, EG - F^2 > 0$$

をみたす D で定義された関数である. ds^2 を D 上の Riemann 計量という.
曲面の第一基本形式が曲面上の曲線の長さを求める場合に現れたことを思い出すと, Riemann 計量を用いて D 上の曲線の長さを計算することができる. すなわち, D 上の曲線

$$\gamma : [a, b] \to D$$

が

$$\gamma(t) = (u(t), v(t)) \quad (t \in [a, b])$$

と表されるとき, γ の長さを

$$\int_a^b \sqrt{E\left(\frac{du}{dt}\right)^2 + 2F\frac{du}{dt}\frac{dv}{dt} + G\left(\frac{dv}{dt}\right)^2}\,dt$$

と定めるのである.

更に, Riemann 計量に対して Gauss 曲率を考えることができる. 特に, Riemann 計量が

$$ds^2 = E(du^2 + dv^2) = e^{2\sigma}(du^2 + dv^2)$$

により定められる場合, Gauss 曲率は

$$-\frac{1}{2}\Delta \log E = -\Delta\sigma$$

によりあたえられる. ただし, Δ は ds^2 に対する Laplacian で

$$\Delta = \frac{1}{E}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right) = e^{-2\sigma}\left(\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2}\right)$$

である.

例 (Poincaré 計量)
$\mathbf{R}^2$ の領域 D を

$$D = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 | u^2 + v^2 < 1\}$$

により定め,

$$ds^2 = \frac{4}{\{1 - (u^2 + v^2)\}^2}(du^2 + dv^2)$$

とおくと, ds^2 は D 上の Riemann 計量となる. 組 (D, ds^2) を Poincaré 円板という.
ds^2 の Gauss 曲率は -1 であることが分かる.
また, $\mathbf{R}^2$ の領域 D' を

$$D' = \{(u, v) \in \mathbf{R}^2 | v > 0\}$$

により定め,

$$ds'^2 = \frac{1}{v^2}(du^2 + dv^2)$$

とおくと, ds'^2 は D' 上の Riemann 計量となる. 組 (D', ds'^2) を Poincaré 上半平面という.
ds'^2 の Gauss 曲率は -1 であることが分かる.
実は上の 2 つの領域の間の全単射で, 一方の領域上の任意の曲線をもう一方へ写しても長さが変わらないようなものが存在することが分かる. このようなとき, (D, ds^2) と (D', ds'^2) は等長的であるという. このことから, 上の 2 つの Riemann 計量をともに Poincaré 計量という.

$\mathbf{R}^2$ の領域 D 上の Riemann 計量 ds^2 に対してある曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

が存在し, p の第一基本形式が ds^2 となるとき, p を (D, ds^2) から $\mathbf{R}^3$ への等長はめ込みという.
Poincaré 計量に関しては次が知られている.

Hilbert の定理　Poincaré 円板, Poincaré 上半平面から $\mathbf{R}^3$ への等長はめ込みは存在しない.

$\mathbf{R}^3$ よりも十分次元の高い Euclid 空間を考えると, 任意の (D, ds^2) からの等長はめ込みが存在することが知られている. この事実を一般化し, Riemann 多様体が十分次元の高い Euclid 空間へ等長的にはめ込み可能であることを示したのが, ゲーム理論においても有名な Nash である.

問題 12

1. 曲面の第一基本形式または $\mathbf{R}^2$ の領域上の Riemann 計量が

$$Edu^2 + Gdv^2$$

のとき, Gauss 曲率は

$$-\frac{1}{\sqrt{EG}}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)+\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)\right\} \qquad (*)$$

となることが知られている.
$a>0$ とする. 半径 a の球面の一部の第一基本形式は

$$a^2du^2 + a^2\sin^2 u dv^2 \quad (0<u<\pi,\ 0<v<2\pi)$$

によりあたえられる. $(*)$ を用いることにより, Gauss 曲率を求めよ.

2. $c \in \mathbf{R}$ とし, $\mathbf{R}^2$ の領域 D および D 上の Riemann 計量 ds^2 を

$$D = \begin{cases} \mathbf{R}^2 & (c \geq 0), \\ \left\{(x,y)\in\mathbf{R}^2 \,\middle|\, u^2+v^2 < -\dfrac{1}{c}\right\} & (c<0), \end{cases} \quad ds^2 = \frac{4}{\{1+c(u^2+v^2)\}^2}(du^2+dv^2)$$

により定める. ds^2 の Gauss 曲率を求めよ.

3. §6 において扱ったように, 曲面に対する Christoffel の記号は第一基本形式のみを用いて表すことができるから, $\mathbf{R}^2$ の領域上の Riemann 計量に対しても Christoffel の記号や測地線を考えることができる.
特に, $\mathbf{R}^2$ の領域 D 上の Riemann 計量が

$$E(du^2+dv^2)$$

のとき, Christoffel の記号は

$$\Gamma^u_{uu} = \frac{E_u}{2E},\ \Gamma^u_{uv} = \frac{E_v}{2E},\ \Gamma^u_{vv} = -\frac{E_u}{2E},\ \Gamma^v_{uu} = -\frac{E_v}{2E},\ \Gamma^v_{uv} = \frac{E_u}{2E},\ \Gamma^v_{vv} = \frac{E_v}{2E}$$

によりあたえられる. また, 問題 6 において扱ったことから分かるように, 測地線の方程式は

$$\begin{cases} u'' + \Gamma^u_{uu}(u')^2 + 2\Gamma^u_{uv}u'v' + \Gamma^u_{vv}(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma^v_{uu}(u')^2 + 2\Gamma^v_{uv}u'v' + \Gamma^v_{vv}(v')^2 = 0 \end{cases}$$

となる.
Poincaré 計量

$$\frac{1}{v^2}(du^2+dv^2)$$

に対する測地線の方程式を求めよ.

問題 12 の解答

1. $(*)$ において

$$E = a^2,\ G = a^2 \sin^2 u$$

とおくと, 求める Gauss 曲率は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{a \cdot a \sin u}\left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{a}\frac{\partial a \sin u}{\partial u}\right) + \frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{a \sin u}\frac{\partial a}{\partial v}\right)\right\} &= -\frac{1}{a^2 \sin u}\frac{\partial \cos u}{\partial u} \\ &= -\frac{1}{a^2 \sin u}(-\sin u) \\ &= \frac{1}{a^2}. \end{aligned}$$

2. まず,

$$E = \frac{4}{\{1 + c(u^2 + v^2)\}^2}$$

とおくと,

$$(\log E)_u = -\frac{4cu}{1 + c(u^2 + v^2)}$$

だから,

$$\begin{aligned} (\log E)_{uu} &= -4c\frac{1 \cdot \{1 + c(u^2 + v^2)\} - u \cdot 2cu}{\{1 + c(u^2 + v^2)\}^2} \\ &= -4c\frac{1 - cu^2 + cv^2}{\{1 + c(u^2 + v^2)\}^2}. \end{aligned}$$

同様に,

$$(\log E)_{vv} = -4c\frac{1 + cu^2 - cv^2}{\{1 + c(u^2 + v^2)\}^2}.$$

よって, ds^2 の Gauss 曲率は

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2E}\{(\log E)_{uu} + (\log E)_{vv}\} &= -\frac{\{1 + c(u^2 + v^2)\}^2}{8}\frac{-8c}{\{1 + c(u^2 + v^2)\}^2} \\ &= c. \end{aligned}$$

3. まず,

$$E = \frac{1}{v^2}$$

とおくと,

$$E_u = 0.$$

また,

$$\begin{aligned} \frac{E_v}{E} &= (\log E)_v \\ &= -\frac{2}{v}. \end{aligned}$$

よって,

$$\Gamma^u_{uu} = 0,\ \Gamma^u_{uv} = -\frac{1}{v},\ \Gamma^u_{vv} = 0,\ \Gamma^v_{uu} = \frac{1}{v},\ \Gamma^v_{uv} = 0,\ \Gamma^v_{vv} = -\frac{1}{v}.$$

したがって, 求める測地線の方程式は

$$\begin{cases} u'' - \dfrac{2}{v}u'v' = 0, \\ v'' + \dfrac{1}{v}(u')^2 - \dfrac{1}{v}(v')^2 = 0. \end{cases}$$