§7. Euclid 空間上の微分形式

§6 までの準備を基に, Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ 上の微分形式を定義しよう.
まず, 1 次微分形式から考える.
$p \in \mathbf{R}^n$ に対して, p における接空間 $T_p\mathbf{R}^n$ の双対空間 $(T_p\mathbf{R})^*$ を $T_p^*\mathbf{R}^n$ と表すことにする. $T_p^*\mathbf{R}^n$ を p における余接ベクトル空間または余接空間という.
各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $\omega_p \in T_p^*\mathbf{R}^n$ があたえられているとする. この対応を ω と表し, $\mathbf{R}^n$ 上の 1 次微分形式という.
ω を $\mathbf{R}^n$ 上の 1 次微分形式とし, $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると, $\omega(X)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の関数を定める.

例 (関数の微分)
関数の微分は 1 次微分形式を定める.
f を $\mathbf{R}^n$ で定義された関数とする. このとき, §2 において扱ったように, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して線形写像

$$(df)_p : T_p\mathbf{R}^n \to T_{f(p)}\mathbf{R}$$

が定まる.
ここで,

$$T_{f(p)}\mathbf{R} = \left\{ a \left(\frac{d}{dx} \right)_{f(p)} \middle| a \in \mathbf{R} \right\} = \{a \in \mathbf{R}\}$$

と自然な同一視を行うと, $(df)_p \in T_p^*\mathbf{R}^n$ である.
よって, df は $\mathbf{R}^n$ 上の 1 次微分形式を定める.
また, $X \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると,

$$(df)(X) = Xf,$$

すなわち

$$(df)_p(X_p) = X_p(f)$$

が各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対してなりたつ.

$\mathbf{R}^n$ を

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) | x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

と表しておくと, $x_1, x_2, \dots, x_n$ は $\mathbf{R}^n$ 上の関数とみなすことができる. これらの微分を考えてみると, 次が得られる.

定理　各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\{(dx_1)_p, (dx_2)_p, \dots, (dx_n)_p\}$ は $T_p\mathbf{R}^n$ の基底 $\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}$ の双対基底.

証明　$i, j = 1, 2, \dots, n$ とすると,

$$\begin{aligned} (dx_i)_p \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p \right) &= \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_p x_i \\ &= \frac{\partial x_i}{\partial x_j}(p) \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

□

例 (全微分)

f を $\mathbf{R}^n$ で定義された関数とすると,

$$df = \sum_{i=1}^{n} (df)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right) dx_i = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i.$$

すなわち,

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n.$$

これはまさに多変数の微分積分において現れる全微分の式である.

更に, 高次の微分形式を考えよう.

各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $\omega_p \in \bigwedge^k T_p^* \mathbf{R}^n$ があたえられているとする. この対応を ω と表し, $\mathbf{R}^n$ 上の k 次微分形式という.

ω を $\mathbf{R}^n$ 上の k 次微分形式とし, $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると, $\omega(X_1, X_2, \ldots, X_k)$ は $\mathbf{R}^n$ 上の関数を定める.

$\mathbf{R}^n$ 上の k 次微分形式全体の集合を $D^k(\mathbf{R}^n)$ と表すことにする.

交代形式に対する外積はそのまま微分形式に対する外積を定め, 次の 2 つの定理がなりたつ.

定理 $\omega, \omega_1, \omega_2 \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in D^l(\mathbf{R}^n)$ とし, a, b を $\mathbf{R}^n$ で定義された関数とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \theta = a\omega_1 \wedge \theta + b\omega_2 \wedge \theta$.

(2) $\omega \wedge (a\theta_1 + b\theta_2) = a\omega \wedge \theta_1 + b\omega \wedge \theta_2$.

定理 $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $\theta \in D^l(\mathbf{R}^n)$, $\psi \in D^r(\mathbf{R}^n)$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega$.

(2) $(\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \omega \wedge (\theta \wedge \psi)$ (結合律).

φ を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像とすると, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して線形写像

$$(d\varphi)_p : T_p \mathbf{R}^n \to T_{\varphi(p)} \mathbf{R}^m$$

が定まる. よって, $\omega \in D^k(\mathbf{R}^m)$ とすると, 各 $p \in \mathbf{R}^n$ に対して $\omega_{\varphi(p)}$ の $(d\varphi)_p$ による引き戻し $(d\varphi)_p^* \omega_{\varphi(p)}$ が定まるが, これを単に $(\varphi^* \omega)_p$ と表す. $(\varphi^* \omega)_p$ は更に写像

$$\varphi^* : D^k(\mathbf{R}^m) \to D^k(\mathbf{R}^n)$$

を定めるが, これも引き戻しという.

なお, 0 階の共変テンソル空間や 0 次の交代形式全体の集合は $\mathbf{R}$ とみなす. このとき, $D^0(\mathbf{R}^m)$ は $\mathbf{R}^m$ で定義された関数全体とみなすことができるが, 関数の引き戻しは写像の合成により定める. すなわち, $f \in D^0(\mathbf{R}^m)$ とすると,

$$\varphi^* f = f \circ \varphi$$

である.

引き戻しと外積の定義より, 次がなりたつ.

定理　$\omega \in D^k(\mathbf{R}^m)$, $\theta \in D^l(\mathbf{R}^m)$ とし, φ を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像とする．このとき,

$$\varphi^*(\omega \wedge \theta) = (\varphi^*\omega) \wedge (\varphi^*\theta).$$

微分形式に対しては外微分という操作によって, その次数を 1 つ上げたものを作ることができる．すなわち, k 次微分形式から $(k+1)$ 次微分形式を対応させることができる．
$k \geq 1$ のとき, 1 つめの定理より, $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$ は

$$\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} f_{i_1 i_2 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と表すことができる．ただし, $f_{i_1 i_2 \ldots i_k}$ は $\mathbf{R}^n$ で定義された関数である．このとき, $d\omega \in D^{k+1}(\mathbf{R}^n)$ を

$$d\omega = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k} df_{i_1 i_2 \ldots i_k} \wedge dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

により定める．$d\omega$ を ω の外微分という．
また, $f \in D^0(\mathbf{R}^n)$ に対しては, 関数の微分として外微分 $df \in D^1(\mathbf{R}^n)$ を定める．
外微分に関する基本的な性質を 3 つ挙げておこう．

定理　$\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $\theta \in D^l(\mathbf{R}^n)$ とする．このとき,

$$d(\omega \wedge \theta) = (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta.$$

定理　$d^2 = 0$. すなわち, 任意の $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$ に対して

$$d(d\omega) = 0.$$

証明　$f \in D^0(\mathbf{R}^n)$ に対して, $d(df) = 0$ がなりたつことのみ示す．
2 つめの例の計算より,

$$\begin{aligned}
d(df) &= d\left(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i} dx_i\right) \\
&= \sum_{i=1}^{n} d\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right) \wedge dx_i \\
&= \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} dx_j \wedge dx_i \\
&= \sum_{i<j} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} - \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}\right) dx_i \wedge dx_j \\
&= 0.
\end{aligned}$$

$\square$

定理　$\omega \in D^k(\mathbf{R}^m)$ とし, φ を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像とする．このとき,

$$\varphi^*(d\omega) = d(\varphi^*\omega).$$

問題 7

1. $\theta \in D^1(\mathbf{R}^{2n})$ を

$$\theta = \sum_{i=1}^{n} x_{2i-1} dx_{2i}$$

により定める．なお，θ を Liouville 形式という．
(1) $d\theta$ を求めよ．なお，$d\theta$ を標準シンプレクティック形式という．
(2) $d\theta$ の n 個の外積を $(d\theta)^n$ と表すことにする．$(d\theta)^n$ を求めよ．

2. $\omega \in D^k(\mathbf{R}^l)$ とし，φ を $\mathbf{R}^n$ から $\mathbf{R}^m$ への写像，ψ を $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^l$ への写像とする．このとき，

$$(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^* \psi^* \omega$$

がなりたつことを示せ．

3. $f_1, f_2, \ldots, f_k \in D^0(\mathbf{R}^n)$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k \in D^1(\mathbf{R}^n)$ とする．
(1) 等式

$$d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_k) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge d\omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_k$$

を示せ．
(2) 等式

$$d(df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k) = 0$$

を示せ．

4. $\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $\theta \in D^l(\mathbf{R}^n)$ とする．$d\omega = 0$, $d\theta = 0$ ならば，$d(\omega \wedge \theta) = 0$ であることを示せ．

5. $\omega \in D^1(\mathbf{R}^n)$, $X, Y \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とする．このとき，

$$(d\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y])$$

がなりたつことを示せ．なお，$k \geq 1$ のとき，$\omega \in D^k(\mathbf{R}^n)$, $X_1, X_2, \ldots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると，

$$\begin{aligned}(d\omega)(X_1, X_2, \ldots, X_{k+1}) &= \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} X_i(\omega(X_1, X_2, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, X_{k+1})) \\ &\quad + \sum_{i<j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \hat{X}_i, \ldots, \hat{X}_j, \ldots, X_{k+1})\end{aligned}$$

がなりたつことが分かる．ただし，右辺において ^ を付けているのは，その部分を除くことを意味する．

問題 7 の解答

1. (1) 外微分の定義より,

$$d\theta = \sum_{i=1}^{n} dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}.$$

(2) $i \neq j$ のとき,

$$(dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}) \wedge (dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}) = (dx_{2j-1} \wedge dx_{2j}) \wedge (dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}).$$

また,

$$(dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}) \wedge (dx_{2i-1} \wedge dx_{2i}) = 0.$$

更に, $D^{2n}(\mathbf{R}^{2n})$ の元は

$$f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}$$

と表すことができる.
よって,

$$(d\theta)^n = n! dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_{2n}.$$

2. $k = 0$ のとき, 写像の合成に関する結合律より,

$$\begin{aligned}(\psi \circ \varphi)^* \omega &= \omega \circ (\psi \circ \varphi) \\ &= (\omega \circ \psi) \circ \varphi \\ &= \varphi^* (\omega \circ \psi) \\ &= \varphi^* \psi^* \omega.\end{aligned}$$

$k \geq 1$ のとき, $X_1, X_2, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(\mathbf{R}^n)$ とすると, 連鎖律より,

$$\begin{aligned}((\psi \circ \varphi)^* \omega)(X_1, X_2, \ldots, X_k) &= \omega((d(\psi \circ \varphi))(X_1), (d(\psi \circ \varphi))(X_2), \ldots, (d(\psi \circ \varphi))(X_k)) \\ &= \omega((d\psi \circ d\varphi)(X_1), (d\psi \circ d\varphi)(X_2), \ldots, (d\psi \circ d\varphi)(X_k)) \\ &= \omega(d\psi((d\varphi)(X_1)), d\psi((d\varphi)(X_2)), \ldots, d\psi((d\varphi)(X_k))) \\ &= (\psi^* \omega)((d\varphi)(X_1), (d\varphi)(X_2), \ldots, (d\varphi)(X_k)) \\ &= (\varphi^* \psi^* \omega)(X_1, X_2, \ldots, X_k).\end{aligned}$$

よって,

$$(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^* \psi^* \omega.$$

3. (1) k に関する数学的帰納法により示す.
$k = 1$ のとき, 等式は正しい.
$k = l$ のとき, 等式が正しいと仮定すると,

$$\begin{aligned}& d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{l+1}) \\ &\quad = d((\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge \omega_{l+1}) \\ &\quad = d(\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge \omega_{l+1} + (-1)^l (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge d\omega_{l+1} \\ &\quad = \left(\sum_{i=1}^{l} (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge d\omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_l \right) \wedge \omega_{l+1} \\ &\qquad + (-1)^l (\omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_l) \wedge d\omega_{l+1} \\ &\quad = \sum_{i=1}^{l+1} (-1)^{i-1} \omega_1 \wedge \omega_2 \wedge \cdots \wedge \omega_{i-1} \wedge d\omega_i \wedge \omega_{i+1} \wedge \cdots \wedge \omega_{l+1}.\end{aligned}$$

よって, $k = l + 1$ のときも等式は正しい.
したがって, 等式は正しい.

(2) (1) と $d^2 = 0$ より,

$$
\begin{aligned}
&d(df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_k) \\
&\quad = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_{i-1} \wedge d(df_i) \wedge df_{i+1} \wedge \cdots \wedge df_k \\
&\quad = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{i-1} df_1 \wedge df_2 \wedge \cdots \wedge df_{i-1} \wedge 0 \wedge df_{i+1} \wedge \cdots \wedge df_k \\
&\quad = 0.
\end{aligned}
$$

4. 外微分の性質より,

$$
\begin{aligned}
d(\omega \wedge \theta) &= (d\omega) \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge d\theta \\
&= 0 \wedge \theta + (-1)^k \omega \wedge 0 \\
&= 0.
\end{aligned}
$$

5. $D^1(\mathbf{R}^n)$ の元は

$$
\omega = \sum_{i=1}^{n} f_i dx_i
$$

と表すことができる.
よって, $\mathbf{R}^n$ で定義された関数 f, g を用いて, $\omega = f dg$ と表されるときに示せばよい.
このとき,

$$
\begin{aligned}
(d\omega)(X, Y) &= (df \wedge dg)(X, Y) \\
&= (df)(X)(dg)(Y) - (df)(Y)(dg)(X) \\
&= (Xf)(Yg) - (Xg)(Yf).
\end{aligned}
$$

一方,

$$
\begin{aligned}
X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]) &= X((fdg)(Y)) - Y((fdg)(X)) - (fdg)([X, Y]) \\
&= X(fYg) - Y(fXg) - f[X, Y]g \\
&= (Xf)(Yg) + fX(Yg) - (Yf)(Xg) - fY(Xg) \\
&\quad - f(X(Yg) - Y(Xg)) \\
&= (Xf)(Yg) - (Xg)(Yf).
\end{aligned}
$$

よって,

$$
(d\omega)(X, Y) = X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).
$$