## §5. 多様体の間の写像

$C^s$ 級関数の定義と同様に, 座標近傍を用いて Euclid 空間の間の写像を考えることにより, $C^r$ 級多様体から $C^r$ 級多様体への $C^s$ 級写像というものを定義することができる. ただし, $s \leq r$ である. また, 関数が値をとる $\mathbf{R}$ は１つの座標近傍で覆われるのに対して, 一般の多様体はそうとは限らないので定義には少し工夫が必要である.

**定義**　$(M, \mathcal{S}), (N, \mathcal{T})$ を $C^r$ 級多様体, $f$ を $M$ から $N$ への写像とし, $p \in M$ とする. $f(p) \in V$ となる任意の $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ と $p \in U \subset f^{-1}(V)$ となる任意の $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ に対して, $\varphi(U)$ から $\psi(V)$ への写像

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} : \varphi(U) \to \psi(V)$$

が $\varphi(p)$ において $C^s$ 級のとき, $f$ は $p$ において $C^s$ 級であるという.

$C^s$ 級関数の定義と同様に, $p$ において $C^s$ 級であるという定義は座標近傍の選び方に依存しないことに注意しよう.

**定義**　$M, N$ を $C^r$ 級多様体, $f$ を $M$ から $N$ への写像とする. 任意の $p \in M$ に対して, $f$ が $p$ において $C^s$ 級のとき, $f$ は $C^s$ 級であるという.
$M$ から $N$ への $C^s$ 級写像全体の集合を $C^s(M, N)$ と表す.

Euclid 空間の間の $C^s$ 級写像の合成は再び $C^s$ 級写像となるが, この事実は自然に一般化することができる.

**定理**　$M_1, M_2, M_3$ を $C^r$ 級多様体とし, $f \in C^s(M_1, M_2)$, $g \in C^s(M_2, M_3)$ とする. このとき, $g \circ f \in C^s(M_1, M_3)$.

多様体の間の $C^s$ 級写像の例を幾つか挙げよう.

**例**　$M$ を $C^r$ 級多様体とする.
一方, $\mathbf{R}$ は１次元 $C^\infty$ 級多様体である.
よって, $M$ から $\mathbf{R}$ への $C^s$ 級写像を考えることができるが, これは $M$ 上の $C^s$ 級関数に他ならない. すなわち,

$$C^s(M, \mathbf{R}) = C^s(M)$$

である.

**例 (曲線)**
開区間 $(a, b)$ は１次元 $C^\infty$ 級多様体 $\mathbf{R}$ の開集合であるから, 開部分多様体とみなして１次元 $C^\infty$ 級多様体である.
ここで, $M$ を $C^r$ 級多様体とする.
$(a, b)$ から $M$ への $C^s$ 級写像を $C^s$ 級曲線という.

**例**　径数付き多様体の張り合わせによって得られる多様体を考えよう.
$M$ を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とし, 任意の $p \in M$ に対して, $p$ を含む $M$ のある開集合 $U$ が $m$ 次元 $C^r$ 級径数付き多様体

$$f : D \to \mathbf{R}^n$$

の像として表されているとする.
一方, $n$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $\mathbf{R}^n$ は１つの座標近傍 $(\mathbf{R}^n, 1_{\mathbf{R}^n})$ で覆うことができる.
ここで, $\iota$ を $M$ から $\mathbf{R}^n$ への包含写像とする.
このとき, $f^{-1}(U) = D$ から $1_{\mathbf{R}^n}(\mathbf{R}^n) = \mathbf{R}^n$ への写像

$$1_{\mathbf{R}^n} \circ \iota \circ (f^{-1})^{-1} : D \to \mathbf{R}^n$$

は $C^r$ 級である.
実際,

$$1_{\mathbf{R}^n} \circ \iota \circ (f^{-1})^{-1} = f$$

で, $f$ は $C^r$ 級だからである.
よって, $\iota \in C^r(M, \mathbf{R}^n)$ である.

**例** $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ は $(n+1)$ 次元 $C^\infty$ 級多様体 $\mathbf{R}^{n+1}$ の開集合であるから, 開部分多様体とみなして $(n+1)$ 次元 $C^\infty$ 級多様体である.
$\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ から $\mathbf{R}P^n$ への自然な射影

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \to \mathbf{R}P^n$$

が $C^\infty$ 級であることを示そう.
$\iota$ を $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像とする.
また, $i = 1, 2, \ldots, n+1$ とし, $\mathbf{R}P^n$ の開集合 $U_i$ を

$$U_i = \{\pi(x) | x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\},\ x_i \neq 0\}$$

により定め, $U_i$ 上の局所座標系 $\varphi_i$ を

$$\varphi_i(p) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

$$(p = \pi(x) \in U_i,\ x = (x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\})$$

により定める.
このとき,

$$(\varphi_i \circ \pi \circ \iota^{-1})(x) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \ldots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \ldots, \frac{x_{n+1}}{x_i}\right)$$

だから, $\varphi_i \circ \pi \circ \iota^{-1}$ は $C^\infty$ 級である. 上の $x$ は $x_i \neq 0$ という範囲で考えていることに注意しよう.
よって, $\pi \in C^\infty(\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}, \mathbf{R}P^n)$ である.

**例** $\iota$ を原点中心, 半径 1 の $n$ 次元球面 $S^n$ から $\mathbf{R}^{n+1}$ への包含写像とする.
$S^n$ は $C^\infty$ 級径数付き多様体の張り合わせによって得られるから, $\iota$ は $C^\infty$ 級である.
また, $\pi$ を $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ から $\mathbf{R}P^n$ への自然な射影とする.
このとき,

$$\iota(S^n) \subset \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$$

となるから, 合成写像 $\pi \circ \iota$ を考えることができる.
上の定理より, $\pi \circ \iota \in C^\infty(S^n, \mathbf{R}P^n)$ である.
なお, $x \in S^n$ とすると, $-x \in S^n$ である. $-x$ を $x$ の対蹠点という.
このとき,

$$(\pi \circ \iota)(x) = (\pi \circ \iota)(-x)$$

であり, 逆に

$$(\pi \circ \iota)(x) = (\pi \circ \iota)(y) \quad (x, y \in S^n)$$

ならば, $y = \pm x$ である.
すなわち, $\mathbf{R}P^n$ は $S^n$ の対蹠点同士を同一視することによって得られる.

**例** $M, N$ を $C^r$ 級多様体, $M \times N$ を $M$ と $N$ の直積多様体とする.

このとき, $M$ への射影

$$\pi_M : M \times N \to M$$

および $N$ への射影

$$\pi_N : M \times N \to N$$

が

$$\pi_M(p,q) = p,\ \pi_N(p,q) = q\ ((p,q) \in M \times N)$$

により定まる.
更に,

$$\pi_M \in C^r(M \times N, M),\ \pi_N \in C^r(M \times N, N)$$

であることが分かる.

§2 において注意したように, $C^r$ 級多様体の座標近傍に対する座標変換は Euclid 空間の開集合の間の $C^r$ 級微分同相写像を定めるのであった.
$C^r$ 級多様体の間の写像に対しても $C^s$ 級微分同相写像という概念を定義することができる.

**定義**　$M, N$ を $C^r$ 級多様体, $f$ を $M$ から $N$ への写像とする. 次の (1), (2) がなりたつとき, $f$ を $C^s$ 級微分同相写像といい, $M$ と $N$ は $C^s$ 級微分同相であるという.

(1) $f$ は全単射.
(2) $f \in C^s(M, N)$ かつ $f^{-1} \in C^s(N, M)$.

**例 (線形写像)**
$f$ を $\mathbf{R}^m$ から $\mathbf{R}^n$ への線形写像とする.
このとき, $f$ は $m \times n$ 行列 $A$ を用いて,

$$f(x) = xA \quad (x \in \mathbf{R}^m)$$

と表すことができる.
よって, $f \in C^\infty(\mathbf{R}^m, \mathbf{R}^n)$.
特に, $m = n$ で, $f$ が全単射なときは, $f$ は $C^\infty$ 級微分同相写像である.
更に, 有限次元実ベクトル空間の間の線形写像に対しても, 同様のことを考えることができる.

**例**　原点中心, 半径 1 の $n$ 次元球面 $S^n$ から $S^n$ 自身への写像 $f$ を

$$f(x) = -x \quad (x \in S^n)$$

により定める. すなわち, $f$ は対蹠点を対応させる写像である.
このとき, $f$ は $C^\infty$ 級微分同相写像である.

**注意**　$C^r$ 級多様体の性質を調べる際には, $C^r$ 級微分同相な多様体は同一視して考えるのが自然である.
また, 1 つの位相多様体に対しても互いに $C^r$ 級微分同相とはならないような $C^r$ 級座標近傍系が存在することがある. すなわち, 位相多様体上の微分構造は一意的とは限らないのである.
例えば, Milnor は 7 次元球面には互いに異なる 28 個の微分構造が存在することを発見した.
§3 において扱った標準的な微分構造をもつ 7 次元球面を除いた残りのもの達を異種球面またはエキゾチック球面という.

**問題 5**

**1.** 実射影直線, すなわち 1 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^1$ の開集合 $U_1, U_2$ を

$$U_1 = \{\pi(x,y) | (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\},\ x \neq 0\},\ U_2 = \{\pi(x,y) | (x,y) \in \mathbf{R}^2 \setminus \{0\},\ y \neq 0\}$$

により定める. ただし, $\pi$ は $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ から $\mathbf{R}P^1$ への自然な射影である. また, $S^1$ を原点中心, 半径 1 の円とし, $N = (0,1)$, $S = (0,-1)$ とおき, $\mathbf{R}$ から $S^1 \setminus \{N\}$ および $S^1 \setminus \{S\}$ への全単射 $\gamma_N$, $\gamma_S$ を

$$\gamma_N(t) = \left( \frac{2t}{t^2+1}, \frac{t^2-1}{t^2+1} \right),\ \gamma_S(t) = \left( \frac{2t}{t^2+1}, \frac{1-t^2}{t^2+1} \right) \qquad (t \in \mathbf{R})$$

により定める. すなわち, $\gamma_N^{-1}, \gamma_S^{-1}$ はそれぞれ $N, S$ を中心とする立体射影である.
更に, $U_1$ から $S^1 \setminus \{N\}$ への写像 $f$ および $U_2$ から $S^1 \setminus \{S\}$ への写像 $g$ を

$$f(\pi(x,y)) = \gamma_N \left( \frac{y}{x} \right)\ (\pi(x,y) \in U_1),\ g(\pi(x,y)) = \gamma_S \left( \frac{x}{y} \right)\ (\pi(x,y) \in U_2)$$

により定める. このとき, $f|_{U_1 \cap U_2} = g|_{U_1 \cap U_2}$ であることを示せ.
特に, $f, g$ は $\mathbf{R}P^1$ から $S^1$ への $C^\infty$ 級微分同相写像を定めることが分かる. すなわち, $\mathbf{R}P^1$ と $S^1$ は $C^\infty$ 級微分同相である.

**2.** 3 次元球面 $S^3$ は

$$S^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbf{C}^2 | |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$$

と表すことができる.
$(z_1, z_2) \in S^3$ に対して

$$f(z_1, z_2) = \bigl(2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2), 2\mathrm{Im}(\overline{z}_1 z_2), |z_2|^2 - |z_1|^2\bigr)$$

とおく. $f$ は 2 次元球面

$$S^2 = \{(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

に値をとることを示せ.
更に, $f$ は $S^3$ から $S^2$ への $C^\infty$ 級写像を定めることが分かる. $f$ を Hopf 写像という.

**3.** 行列式が 1 の 2 次のユニタリ行列は

$$\begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \qquad (a, b \in \mathbf{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1)$$

と表されることを示せ.
特に, 2 次の特殊ユニタリ群

$$\mathrm{SU}(2) = \{A | A \text{ は行列式が 1 の 2 次のユニタリ行列 }\}$$

は 3 次元球面 $S^3$ と $C^\infty$ 級微分同相な多様体となることが分かる.

**問題 5 の解答**

**1.** $\pi(x,y) \in U_1 \cap U_2$ とする.
このとき,

$$
\begin{aligned}
f(\pi(x,y)) &= \gamma_N\left(\frac{y}{x}\right) \\
&= \left( \frac{2\dfrac{y}{x}}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1}, \frac{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2-1}{\left(\dfrac{y}{x}\right)^2+1} \right) \\
&= \left( \frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} \right).
\end{aligned}
$$

また,

$$
\begin{aligned}
g(\pi(x,y)) &= \gamma_S\left(\frac{x}{y}\right) \\
&= \left( \frac{2\dfrac{x}{y}}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1}, \frac{1-\left(\dfrac{x}{y}\right)^2}{\left(\dfrac{x}{y}\right)^2+1} \right) \\
&= \left( \frac{2xy}{x^2+y^2}, \frac{y^2-x^2}{x^2+y^2} \right).
\end{aligned}
$$

よって,

$$
f|_{U_1\cap U_2} = g|_{U_1\cap U_2}.
$$

**2.** 直接計算すると,

$$
\begin{aligned}
(2\mathrm{Re}(\overline{z}_1 z_2))^2 + (2\mathrm{Im}(\overline{z}_1 z_2))^2 + \left(|z_2|^2 - |z_1|^2\right)^2 &= (\overline{z}_1 z_2 + z_1 \overline{z}_2)^2 + \left(\frac{\overline{z}_1 z_2 - z_1 \overline{z}_2}{i}\right)^2 \\
&\quad + |z_2|^4 - 2|z_1|^2|z_2|^2 + |z_1|^4 \\
&= \overline{z}_1^2 z_2^2 + 2|z_1|^2|z_2|^2 + z_1^2 \overline{z}_2^2 \\
&\quad - \overline{z}_1^2 z_2^2 + 2|z_1|^2|z_2|^2 - z_1^2 \overline{z}_2^2 \\
&\quad + |z_2|^4 - 2|z_1|^2|z_2|^2 + |z_1|^4 \\
&= \left(|z_1|^2 + |z_2|^2\right)^2 \\
&= 1^2 \\
&= 1.
\end{aligned}
$$

よって, $f$ は $S^2$ に値をとる.

**3.** $A$ を行列式が 1 の 2 次のユニタリ行列とし,

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad (a, b, c, d \in \mathbf{C},\ ad - bc = 1)
$$

と表しておく.

このとき,

$$
\begin{aligned}
AA^* &= \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{a} & \overline{c} \\ \overline{b} & \overline{d} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\overline{c} + b\overline{d} \\ c\overline{a} + d\overline{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}
$$

これが単位行列となるから,

$$|a|^2 + |b|^2 = 1,\ a\overline{c} + b\overline{d} = 0,\ |c|^2 + |d|^2 = 1.$$

第 1 式より,

$$(a, b) \neq 0$$

だから, 第 2 式より, ある $\lambda \in \mathbf{C}$ が存在し,

$$(c, d) = \lambda(\overline{b}, -\overline{a}).$$

更に, 第 1 式より,

$$
\begin{aligned}
ad - bc &= a(-\lambda\overline{a}) - b\lambda\overline{b} \\
&= -\lambda(|a|^2 + |b|^2) \\
&= -\lambda.
\end{aligned}
$$

これが 1 となるから,

$$\lambda = -1.$$

よって,

$$(c, d) = (-\overline{b}, \overline{a}).$$

第 1 式より, これは第 3 式をみたす.
したがって,

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\overline{b} & \overline{a} \end{pmatrix} \quad (a, b \in \mathbf{C},\ |a|^2 + |b|^2 = 1).$$