§7. 写像の微分

多様体の間の写像に対する微分は接空間の間の線形写像として定義することができる.
$(M, \mathcal{S})$ を m 次元 C^r 級多様体とする. ただし, $r \geq 1$ とする. また, $\varepsilon > 0$, $p \in M$ とし,

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

を $\gamma(0) = p$ となる C^r 級曲線とする. このとき, §6 において扱ったように, p における接ベクトル v_γ が定まる. $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を γ の像が U に含まれるように選んでおき,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$$

と表しておくと,

$$v_\gamma = \sum_{i=1}^{m} \dot{x}_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

である.
ここで, $(N, \mathcal{T})$ を n 次元 C^r 級多様体, f を M から N への C^r 級写像とし, $q = f(p)$ とおく. このとき,

$$f \circ \gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to N$$

は $(f \circ \gamma)(0) = q$ となる C^r 級曲線であるから, q における接ベクトル $v_{f\circ\gamma}$ が定まる.
接空間はベクトル空間であった. v_γ から $v_{f\circ\gamma}$ への対応は T_pM から T_qN への線形写像を定めることを示そう.
$(V, \psi) \in \mathcal{T}$ を $f \circ \gamma$ の像が V に含まれるように選んでおき,

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n),\ \psi \circ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

と表しておくと,

$$\psi \circ (f \circ \gamma) = (\psi \circ f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma).$$

$j = 1, 2, \ldots, n$ とすると, 合成関数の微分法より,

$$\frac{dy_j}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial (f_j \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}.$$

よって,

$$\begin{aligned} v_{f\circ\gamma} &= \sum_{j=1}^{n} \dot{y}_j(0) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q \\ &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{m} \dot{x}_i(0) \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_q. \end{aligned}$$

したがって, v_γ から $v_{f\circ\gamma}$ への対応は T_pM から T_qN への線形写像を定める.
この対応を p における f の微分といい, $(df)_p$ と表す.
上の座標近傍を用いて, T_pM, T_qN の基底として, それぞれ

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m} \right)_p \right\},\ \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right\}$$

を選んでおき, この基底に関する $(df)_p$ の表現行列を A とする.

A は上の座標近傍を用いて表される f の Jacobi 行列

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_1} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_1} \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_2} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial f_1}{\partial x_m} & \dfrac{\partial f_2}{\partial x_m} & \cdots & \dfrac{\partial f_n}{\partial x_m} \end{pmatrix}$$

である. ただし, ここでは

$$\begin{pmatrix} (df)_p\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p\right) \\ (df)_p\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_p\right) \\ \vdots \\ (df)_p\left(\left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right) \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} \left(\dfrac{\partial}{\partial y_1}\right)_q \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y_2}\right)_q \\ \vdots \\ \left(\dfrac{\partial}{\partial y_m}\right)_q \end{pmatrix}$$

をみたす A を表現行列の定義とする. 特に, $i = 1, 2, \ldots, m$ とすると,

$$(df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) = \sum_{j=1}^n \frac{\partial f_j}{\partial x_i}(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q$$

である.

例 $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする.
M 上の C^r 級関数 f とは M から $\mathbf{R}$ への C^r 級写像のことであった.
$p \in M$ とし, p における f の微分を求めよう.
$(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $p \in U$ となるように選んでおき,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておく.
また, $v \in T_pM$ を

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R})$$

と表しておく.
$\left\{\left(\dfrac{d}{dt}\right)_{f(p)}\right\}$ は $T_{f(p)}\mathbf{R}$ の基底で,

$$\begin{aligned} (df)_p(v) &= \sum_{i=1}^n a_i (df)_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)\left(\frac{d}{dt}\right)_{f(p)} \\ &= v(f)\left(\frac{d}{dt}\right)_{f(p)}. \end{aligned}$$

最後の等式において, 接ベクトル v は関数 f に対して方向微分 $v(f)$ を定めることを思い出そう.

例　I を 0 を含む開区間, $(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする.
C^r 級曲線

$$\gamma : I \to M$$

とは 1 次元多様体 I から M への C^r 級写像のことであった.
0 における γ の微分 $(d\gamma)_0$ を求めよう.
$(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を γ の像が U に含まれるように選んでおき,

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく.
$\left\{ \left(\frac{d}{dt} \right)_0 \right\}$ は $T_0 I$ の基底で, $(d\gamma)_0$ は線形写像であるから, $(d\gamma)_0 \left(\left(\frac{d}{dt} \right)_0 \right)$ を計算すれば十分であることに注意しよう. このとき,

$$\begin{aligned} (d\gamma)_0 \left(\left(\frac{d}{dt} \right)_0 \right) &= \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(0)} \\ &= v_\gamma. \end{aligned}$$

すなわち, 開区間の標準的な接ベクトルの C^r 級曲線の微分による像はその曲線から定まる接ベクトルとなる.

Euclid 空間の間の微分可能な写像に対しては連鎖律がなりたった. この事実は C^r 級多様体の間の C^r 級写像の場合へ一般化することができる.

連鎖律　M_1, M_2, M_3 を C^r 級多様体とし, $f \in C^r(M_1, M_2)$, $g \in C^r(M_2, M_3)$ とする. $p \in M_1$ とすると,

$$(d(g \circ f))_p = (dg)_{f(p)} \circ (df)_p.$$

次の 2 つの定理は Euclid 空間の場合と同様にして証明することができる.

定理　M を C^r 級多様体, f を M から M への C^r 級写像とし, $p \in M$ を固定しておく. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) f が恒等写像ならば, $(df)_p$ は $T_p M$ の上の恒等変換である.
(2) f が C^r 級微分同相写像ならば,

$$(df^{-1})_{f(p)} = (df)_p^{-1}.$$

定理　M を m 次元 C^r 級多様体, N を n 次元 C^r 級多様体とする. M から N への C^r 級微分同相写像が存在するならば, $m = n$.

2 つめの定理より, 多様体の次元は微分同相写像によって不変な概念となる.
また, §6 において求めた接空間の基底変換の基底変換行列は恒等写像に対する微分を考え, Jacobi 行列を計算することによっても求めることができる.

問題 7

1. M を C^∞ 級多様体とし, $p \in M$ とする. 問題 6 において触れたように, T_pM は $C^\infty(M)$ から $\mathbf{R}$ への写像 v で, 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ および任意の $f, g \in C^\infty(M)$ に対して, 次の (i), (ii) がなりたつもの全体の集合と同一視することができる.

$$\text{(i)}\ \ v(af + bg) = av(f) + bv(g).$$
$$\text{(ii)}\ v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

ここでは, 接ベクトルおよび接空間を上のように考えることにする.
N も C^∞ 級多様体とする. $\varphi \in C^\infty(M, N)$, $v \in T_pM$ とし, $C^\infty(N)$ から $\mathbf{R}$ への写像 $(d\varphi)_p(v)$ を

$$((d\varphi)_p(v))(f) = v(f \circ \varphi) \quad (f \in C^\infty(N))$$

により定める. $(d\varphi)_p(v) \in T_{\varphi(p)}N$ であることを示せ.
なお, $(d\varphi)_p$ は T_pM から $T_{\varphi(p)}N$ への線形写像を定めることも分かり, p における φ の微分となる.

2. $(M, \mathcal{S})$ を m 次元 C^r 級多様体, $(N, \mathcal{T})$ を n 次元 C^r 級多様体, $M \times N$ を M と N の直積多様体とする. §5 において扱ったように, $M \times N$ から M への自然な射影 π_M および $M \times N$ から N への自然な射影 π_N は C^r 級写像である. $(p, q) \in M \times N$ とし, $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$, $(V, \psi) \in \mathcal{T}$ を $p \in U$, $q \in V$ となるように選んでおく. また,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ \psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておく. このとき,

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p\right\},\ \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_q, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_q, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_q\right\},$$

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_{(p,q)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_{(p,q)},\ \left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_{(p,q)}, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_{(p,q)}\right\}$$

はそれぞれ T_pM, T_qN, $T_{(p,q)}(M \times N)$ の基底となる.
(1) $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$(d\pi_M)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p,q)}\right),\ (d\pi_M)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{(p,q)}\right),$$

$$(d\pi_N)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p,q)}\right),\ (d\pi_N)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{(p,q)}\right)$$

を求めよ.
(2) 線形写像

$$(d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$$

を

$$\left((d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)}\right)(v) = \left((d\pi_M)_{(p,q)}(v), (d\pi_N)_{(p,q)}(v)\right) \quad (v \in T_{(p,q)}(M \times N))$$

により定める. $(d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)}$ は線形同型写像であることを示せ.

問題 7 の解答

1. $a, b \in \mathbf{R}$, $f, g \in C^\infty(N)$ とする.
まず,

$$\begin{aligned}((d\varphi)_p(v))(af+bg) &= v((af+bg)\circ\varphi)\\ &= v(a(f\circ\varphi)+b(g\circ\varphi))\\ &= av(f\circ\varphi)+bv(g\circ\varphi)\\ &= a((d\varphi)_p(v))(f)+b((d\varphi)_p(v))(g).\end{aligned}$$

次に,

$$\begin{aligned}((d\varphi)_p(v))(fg) &= v((fg)\circ\varphi)\\ &= v((f\circ\varphi)(g\circ\varphi))\\ &= v(f\circ\varphi)(g\circ\varphi)(p)+(f\circ\varphi)(p)v(g\circ\varphi)\\ &= ((d\varphi)_p(v))(f)g(\varphi(p))+f(\varphi(p))((d\varphi)_p(v))(g).\end{aligned}$$

よって,

$$(d\varphi)_p(v) \in T_{\varphi(p)}N.$$

2. (1) 座標近傍を用いると,

$$\left(\varphi\circ\pi_M\circ(\varphi\times\psi)^{-1}\right)(x_1, x_2, \ldots, x_m, y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_m).$$

また,

$$\varphi\circ\pi_M = (f_1, f_2, \ldots, f_m)$$

と表しておき,

$$(\varphi\times\psi)(p, q) = (a, b)$$

とおく.
まず,

$$\begin{aligned}(d\pi_M)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p,q)}\right) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial x_i}(p,q)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial x_k}{\partial x_i}(a,b)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\\ &= \sum_{k=1}^m \delta_{ik}\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p.\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}(d\pi_M)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{(p,q)}\right) &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_k}{\partial y_j}(p,q)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\\ &= \sum_{k=1}^m \frac{\partial x_k}{\partial y_j}(a,b)\left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p\\ &= 0.\end{aligned}$$

同様に,

$$(d\pi_N)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{(p,q)}\right)=0,\ (d\pi_N)_{(p,q)}\left(\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_{(p,q)}\right)=\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_q.$$

(2) $T_{(p,q)}(M\times N)$ の基底を (1) のように選んでおき, $T_pM\times T_qN$ の基底として

$$\left\{\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p,0\right),\dots,\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_m}\right)_p,0\right),\ \left(0,\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_q\right),\dots,\left(0,\left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_q\right)\right\}$$

を選んでおく.
(1) より, これらの基底に関する $(d\pi_M)_{(p,q)}\times(d\pi_N)_{(p,q)}$ の表現行列は単位行列.
よって, $(d\pi_M)_{(p,q)}\times(d\pi_N)_{(p,q)}$ は線形同型写像.