§9. ベクトル場

Euclid 空間上のベクトル場を一般化し, 多様体上のベクトル場を考えることができる.
$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする. ただし, $r \geq 1$ とする. 各 $p \in M$ に対して $X_p \in T_pM$ があたえられているとき, この対応を X と表し, M 上のベクトル場という.
$p \in M$ とし, $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $p \in U$ となるように選んでおく. φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておくと, p における接ベクトルは

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \quad (a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R})$$

と表されたから, M 上のベクトル場 X は U 上では U で定義された関数 $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ を用いて,

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表すことができる.
ここで, $(V, \psi) \in S$ も $p \in V$ となるように選んでおき,

$$\psi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

と表しておくと, §6 において述べたように,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = \sum_{i=1}^n \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

がなりたつ.
M は C^r 級多様体であるから, 関数 $\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}$ は C^{r-1} 級であることに注意しよう. ただし, $r = \infty$ のときは $r - 1 = \infty$ とみなす. よって, ベクトル場の微分可能性については, 次のように定義すべきである.

定義　$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体, X を M 上のベクトル場とし, $0 \leq s \leq r - 1$ とする. 任意の $(U, \varphi) \in S$ に対して φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておき, X を U 上で

$$X = \sum_{i=1}^n \xi_i \frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表しておく. $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$ が U 上の C^s 級関数となるとき, X は C^s 級であるという.

以下では, C^∞ 級多様体上の C^∞ 級ベクトル場を考えることにする.
M を C^∞ 級多様体とし, M 上の C^∞ 級ベクトル場全体の集合を $\mathfrak{X}(M)$ と表すことにする. Euclid 空間上のベクトル場の場合と同様に, $\mathfrak{X}(M)$ に対して次の 2 つの演算を定めることができる.
まず, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ のとき, $X + Y \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p \quad (p \in M)$$

により定める．T_pM はベクトル空間であったから, 和が定義されていることを思い出そう．また, 座標近傍を用いて考えると, $X+Y$ は C^∞ 級となることにも注意しよう．
次に, $X \in \mathfrak{X}(M)$ と $f \in C^\infty(M)$ に対して, $fX \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$(fX)_p = f(p)X_p \quad (p \in M)$$

により定める．ここでも, T_pM はベクトル空間であったから, スカラー倍が定義されていることを思い出そう．また, 座標近傍を用いて考えると, fX は C^∞ 級となることにも注意しよう．
また, 各 $p \in M$ に対して T_pM の零ベクトルを対応させるベクトル場は C^∞ 級である．このベクトル場を 0 と表す．
更に, $X \in \mathfrak{X}(M)$ のとき, $-X \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$(-X)_p = -X_p \quad (p \in M)$$

により定めることができる．
このとき, 次がなりたつ．

定理 M を C^∞ 級多様体とし, $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ とする．このとき, 次の (1)〜(8) がなりたつ．
(1) $X+Y = Y+X$.
(2) $(X+Y)+Z = X+(Y+Z)$.
(3) $X+0 = X$.
(4) $X+(-X) = 0$.
(5) $(fg)X = f(gX)$.
(6) $(f+g)X = fX+gX$.
(7) $f(X+Y) = fX+fY$.
(8) $1X = X$.

$X \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とする．このとき, $Xf \in C^\infty(M)$ を

$$(Xf)(p) = X_p(f) \quad (p \in M)$$

により定めることができる．接ベクトルと関数に対しては方向微分が定義されていたことを思い出そう．Xf を X による f の微分という．このとき, 次がなりたつ．

定理 M を C^∞ 級多様体とし, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $f, g \in C^\infty(M)$ とする．このとき, 次の (1), (2) がなりたつ．
(1) $a, b \in \mathbf{R}$ とすると, $X(af+bg) = aXf + bXg$.
(2) $X(fg) = (Xf)g + f(Xg)$.

証明 $M = \mathbf{R}^n$ の場合の証明と同様である． □

なお, X が C^s 級, f が C^r 級で, $0 \le s \le r-1$ のときは Xf は C^s 級となる．
括弧積についても Euclid 空間上のベクトル場の場合と同様に定めることができる．
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とする．
X と Y の括弧積 $[X, Y]$ は微分作用素としては, f に対して

$$X(Yf) - Y(Xf)$$

を対応させるものとして定義することができる．

また, M の座標近傍 (U,φ) に対して

$$\varphi=(x_1,x_2,\ldots,x_n),\ X=\sum_{i=1}^n \xi_i\frac{\partial}{\partial x_i},\ Y=\sum_{i=1}^n \eta_i\frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表しておくと,

$$[X,Y]=\sum_{i=1}^n\sum_{j=1}^n\left(\xi_j\frac{\partial \eta_i}{\partial x_j}-\eta_j\frac{\partial \xi_i}{\partial x_j}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}$$

と表すことができる.
括弧積に関する次の定理も Euclid 空間上のベクトル場の場合と同様である.

定理　M を C^∞ 級多様体とし, $X,Y,Z\in\mathfrak{X}(M)$ とする. このとき, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $[X,Y+Z]=[X,Y]+[X,Z]$, $[X+Y,Z]=[X,Z]+[Y,Z]$.
(2) $[X,Y]=-[Y,X]$.
(3) $[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]=0$ (Jacobi の恒等式).
(4) $f,g\in C^\infty(M)$ とすると, $[fX,gY]=fg[X,Y]+f(Xg)Y-g(Yf)X$.

§7 において, 開区間の標準的な接ベクトルの C^r 級曲線の微分による像はその曲線から定まる接ベクトルとなったことを思い出そう. すなわち, I を 0 を含む開区間, M を C^r 級多様体とし, $\gamma\in C^r(I,M)$ とすると,

$$(d\gamma)_0\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_0\right)=v_\gamma$$

であった.
以下では,

$$(d\gamma)_t\left(\left(\frac{d}{dt}\right)_t\right)=\frac{d\gamma}{dt}(t)=\gamma'(t)$$

などと表すことにする. これは $T_{\gamma(t)}M$ の元である.
逆に, 先にベクトル場をあたえて, 対応する曲線を考えてみよう.

定義　I を開区間, M を C^∞ 級多様体とし, $X\in\mathfrak{X}(M)$ とする. $\gamma\in C^\infty(I,M)$ は任意の $t\in I$ に対して

$$\gamma'(t)=X_{\gamma(t)} \tag{$*$}$$

をみたすとき, X の積分曲線という.

座標近傍を用いると, $(*)$ は正規形の常微分方程式として表すことができる.
よって, 微分方程式の解の存在定理より, 積分曲線は局所的には存在する.
また, I,J をともに 0 を含む開区間とし, $\gamma_1\in C^\infty(I,M)$, $\gamma_2\in C^\infty(J,M)$ を $\gamma_1(0)=\gamma_2(0)$ となる X の積分曲線とすると, 微分方程式の解の一意性より,

$$\gamma_1|_{I\cap J}=\gamma_2|_{I\cap J}$$

である.
任意の $p\in M$ に対して $\mathbf{R}$ で定義された X の積分曲線で $\gamma(0)=p$ となるものが存在するとき, X は完備であるという.
例えば, コンパクト C^∞ 級多様体上の任意の C^∞ 級ベクトル場は完備である.

問題 9

1. M, N を C^∞ 級多様体とし, $\varphi \in C^\infty(M, N)$ とする. このとき, $C^\infty(N)$ から $C^\infty(M)$ への写像 φ^* を

$$\varphi^* f = f \circ \varphi \quad (f \in C^\infty(N))$$

により定める.

(1) $C^\infty(M)$ および $C^\infty(N)$ は自然にベクトル空間となる. φ^* は線形写像であることを示せ.

(2) φ を C^∞ 級微分同相写像とし, $X \in \mathfrak{X}(M)$ とする. このとき, $\varphi_* X \in \mathfrak{X}(N)$ を

$$(\varphi_* X)_{\varphi(p)} = (d\varphi)_p(X_p) \quad (p \in M)$$

により定めることができる. $f \in C^\infty(N)$ とすると,

$$X(\varphi^* f) = \varphi^*((\varphi_* X)(f))$$

がなりたつことを示せ.

(3) φ を C^∞ 級微分同相写像とし, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とする. このとき,

$$\varphi_*[X, Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y]$$

がなりたつことを示せ.

2. $\mathbf{R}^2$ の開部分多様体 D を

$$D = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 < 1\}$$

により定める. $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $X \in \mathfrak{X}(D)$ を

$$X = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (-bx + ay)\frac{\partial}{\partial y}$$

により定める. X が完備となるための条件を求めよ.

3. M を C^∞ 級多様体とする. 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して M から M への C^∞ 級微分同相写像 φ_t があたえられ, 次の (i), (ii) をみたすとする.

(i) 任意の $s, t \in \mathbf{R}$ に対して $\varphi_s \circ \varphi_t = \varphi_{s+t}$.

(ii) $(t, p) \in \mathbf{R} \times M$ から $\varphi_t(p) \in M$ への対応は直積多様体 $\mathbf{R} \times M$ から M への C^∞ 級写像を定める.

このとき, $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ を M の 1 パラメータ変換群という.

(1) φ_0 は恒等写像であることを示せ.

なお, M の 1 パラメータ変換群 $\{\varphi_t\}_{t \in \mathbf{R}}$ に対して, $X \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$X_p = \left.\frac{d\varphi_t(p)}{dt}\right|_{t=0} \quad (p \in M)$$

により定めることができる. 逆に, $X \in \mathfrak{X}(M)$ が完備ならば, 積分曲線を考えることにより, それに対応する 1 パラメータ変換群を構成することができる.

(2) 任意の $t \in \mathbf{R}$ に対して $\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}$ がなりたつことを示せ.

問題 9 の解答

1. (1) $f, g \in C^\infty(N)$ とすると,

$$\begin{aligned}\varphi^*(f+g) &= (f+g)\circ\varphi \\ &= f\circ\varphi + f\circ\varphi \\ &= \varphi^* f + \varphi^* g.\end{aligned}$$

更に, $c \in \mathbf{R}$ とすると,

$$\begin{aligned}\varphi^*(cf) &= (cf)\circ\varphi \\ &= c(f\circ\varphi) \\ &= c\varphi^* f.\end{aligned}$$

よって, φ^* は線形写像.

(2) $p \in M$ とすると,

$$\begin{aligned}(X(\varphi^* f))(p) &= X_p(\varphi^* f) \\ &= X_p(f\circ\varphi) \\ &= ((d\varphi)_p(X_p))(f) \\ &= (\varphi_* X)_{\varphi(p)}(f) \\ &= ((\varphi_* X)(f))(\varphi(p)) \\ &= (\varphi^*((\varphi_* X)(f)))(p).\end{aligned}$$

よって,

$$X(\varphi^* f) = \varphi^*((\varphi_* X)(f)).$$

(3) $f \in C^\infty(N)$ とすると, (2), (1) より,

$$\begin{aligned}\varphi^*((\varphi_*[X,Y])(f)) &= [X,Y](\varphi^* f) \\ &= X(Y(\varphi^* f)) - Y(X(\varphi^* f)) \\ &= X(\varphi^*((\varphi_* Y)(f))) - Y(\varphi^*((\varphi_* X)(f))) \\ &= \varphi^*((\varphi_* X)((\varphi_* Y)(f))) - \varphi^*((\varphi_* Y)((\varphi_* X)(f))) \\ &= \varphi^*\left((\varphi_* X)((\varphi_* Y)(f)) - (\varphi_* Y)((\varphi_* X)(f))\right) \\ &= \varphi^*\left([\varphi_* X, \varphi_* Y](f)\right).\end{aligned}$$

ここで, φ は C^∞ 級微分同相写像だから, φ^* は全単射.
よって,

$$(\varphi_*[X,Y])(f) = [\varphi_* X, \varphi_* Y](f).$$

したがって,

$$\varphi_*[X,Y] = [\varphi_* X, \varphi_* Y].$$

2. $(x_0, y_0) \in D$ を固定しておき, γ を $\gamma(0) = (x_0, y_0)$ となる X の積分曲線とする.
$\gamma = (x, y)$ と表しておくと,

$$(x', y') = (ax + by, -bx + ay).$$

すなわち,

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= \left(\exp\begin{pmatrix} at & bt \\ -bt & at \end{pmatrix}\right) \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^{at}\cos bt & e^{at}\sin bt \\ -e^{at}\sin bt & e^{at}\cos bt \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

X が完備となるためには, 任意の $t \in \mathbf{R}$ および任意の $(x_0, y_0) \in D$ に対して $\gamma(t) \in D$ とならなければいけないから, 求める条件は $a = 0$.

3. (1) (i) において, $s = t = 0$ とすると,

$$\varphi_0 \circ \varphi_0 = \varphi_0.$$

両辺に φ_0^{-1} を合成すると,

$$\varphi_0 = 1_M.$$

(2) (i) において, $s = -t$ とすると, (1) より,

$$\begin{aligned} \varphi_{-t} \circ \varphi_t &= \varphi_0 \\ &= 1_M. \end{aligned}$$

同様に,

$$\varphi_t \circ \varphi_{-t} = 1_M.$$

よって,

$$\varphi_{-t} = \varphi_t^{-1}.$$