§11. 1の分割

多様体論における基本的な手法である 1 の分割について述べよう. なお, 1 の分割は 1 の分解あるいは単位の分割などともいう. また, C^0 級多様体, すなわち位相多様体の場合の 1 の分割の存在については位相空間論に関する事実を用いて示すこともできる.
まず, 関数の台というものを定義しよう.

定義　M を C^r 級多様体とし, $f \in C^0(M)$ に対して

$$\mathrm{supp}\,(f) = \overline{\{p \in M | f(p) \neq 0\}}$$

とおく. すなわち, $\mathrm{supp}\,(f)$ は f の値が 0 とはならない点全体の閉包である. $\mathrm{supp}\,(f)$ を f の台という.

1 の分割について述べるための準備として, 次の 2 つの定理を示そう.

定理　M を C^r 級多様体, K を M のコンパクト部分集合, U を K を含む M の開集合とする. このとき, 次の (1)〜(3) をみたす $f \in C^r(M)$ が存在する.

(1) 任意の $p \in M$ に対して $f(p) \geq 0$.
(2) 任意の $p \in K$ に対して $f(p) > 0$.
(3) $\mathrm{supp}\,(f) \subset U$.

証明　$K = \emptyset$ のときは $f = 0$ とおけばよい.
$K \neq \emptyset$ とする.
§4 において扱ったことより, K の各点 p に対して p の開近傍 V_p と M 上の C^r 級関数 f_p で, 次の (i)〜(iii) をみたすものが存在する.

(i)　$\overline{V_p} \subset U$.
(ii)　$f_p(x) = 0\ (x \in M \setminus U),\ 0 \leq f_p(x) < 1\ (x \in U \setminus \overline{V_p}),\ f_p(x) = 1\ (x \in \overline{V_p})$.
(iii) $\mathrm{supp}\,(f_p) \subset U$.

また, $\{V_p\}_{p \in K}$ は K の開被覆.
K はコンパクトだから, ある $p_1, p_2, \ldots, p_k \in K$ が存在し, $\{V_{p_i}\}_{i=1}^k$ は K の開被覆.
簡単のため, V_{p_i} を V_i, f_{p_i} を f_i と表すことにする.
ここで, M 上の関数 f を

$$f(p) = \sum_{i=1}^k f_i(p) \quad (p \in M)$$

により定める.
まず, $f_i \in C^r(M)$ だから, $f \in C^r(M)$.
次に, 任意の $p \in M$ に対して $f_i(p) \geq 0$ だから, $f(p) \geq 0$. すなわち, (1) がなりたつ.
また, $p \in K$ とすると, $\{V_i\}_{i=1}^k$ は K の開被覆だから, ある $i_0 \in \{1, 2, \ldots, k\}$ が存在し, $p \in V_{i_0}$.
よって, (ii) より, $f_{i_0}(p) = 1$ で, 任意の $p \in M$ に対して $f_i(p) \geq 0$ だから, (2) がなりたつ.
更に, 任意の $p \in M$ に対して $f_i(p) \geq 0$ だから,

$$\{p \in M | f(p) \neq 0\} = \bigcup_{i=1}^k \{p \in M | f_i(p) \neq 0\}.$$

両辺の閉包を取ると,

$$\mathrm{supp}\,(f) = \bigcup_{i=1}^{k} \mathrm{supp}\,(f_i).$$

(iii) より, (3) がなりたつ. □

定理　M をコンパクト C^r 級多様体, U, V を $M = U \cup V$ となる M の開集合とする. このとき, 次の (1), (2) をみたす M のコンパクト部分集合 K, L が存在する.

(1) $K \subset U,\ L \subset V$.
(2) $M = K \cup L$.

証明　座標近傍を用いて考えると, M の各点 p に対して p の開近傍 V_p が存在し, $\overline{V}_p$ はコンパクトで, U または V の何れか一方に含まれる.
このとき, $\{V_p\}_{p \in M}$ は M の開被覆.
M はコンパクトだから, ある $p_1, p_2, \ldots, p_k \in M$ が存在し, $\{V_{p_i}\}_{i=1}^{k}$ は M の開被覆.
よって,

$$K = \bigcup_{\overline{V}_{p_i} \subset U} \overline{V}_{p_i},\ L = \bigcup_{\overline{V}_{p_i} \subset V} \overline{V}_{p_i}$$

とおけばよい. □

上の 2 つの定理を用いて, 次の形の 1 の分割の存在を示そう.

定理　M をコンパクト C^r 級多様体, U, V を $M = U \cup V$ となる M の開集合とする. このとき, 次の (1)〜(3) をみたす $f, g \in C^r(M)$ が存在する.

(1) 任意の $p \in M$ に対して $0 \leq f(p) \leq 1,\ 0 \leq g(p) \leq 1$.
(2) $\mathrm{supp}\,(f) \subset U,\ \mathrm{supp}\,(g) \subset V$.
(3) 任意の $p \in M$ に対して $f(p) + g(p) = 1$.

証明　M のコンパクト部分集合 K, L を上の 2 つめの定理のように選んでおく.
上の 1 つめの定理より, 次の (i)〜(iii) をみたす $f_U \in C^r(M)$ が存在する.

(i)　任意の $p \in M$ に対して $f_U(p) \geq 0$.
(ii)　任意の $p \in K$ に対して $f_U(p) > 0$.
(iii) $\mathrm{supp}\,(f_U) \subset U$.

同様に, 次の (i)'〜(iii)' をみたす $f_V \in C^r(M)$ が存在する.

(i)'　任意の $p \in M$ に対して $f_V(p) \geq 0$.
(ii)'　任意の $p \in L$ に対して $f_V(p) > 0$.
(iii)' $\mathrm{supp}\,(f_V) \subset V$.

よって,

$$f = \frac{f_U}{f_U + f_V},\ g = \frac{f_V}{f_U + f_V}$$

とおけばよい. □

上の定理における関数の組 $\{f, g\}$ を $\{U, V\}$ に従属する 1 の分割という.

より一般的な1の分割について述べるために, 次の言葉を定義しよう.

定義 X を位相空間とする.
$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を X の部分集合族とする. 任意の $p\in X$ に対して p の近傍 U が存在し, $U\cap U_\alpha\neq\emptyset$ となる α の個数が有限個であるとき, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ は局所有限であるという.
$\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ および $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ をともに X の被覆とする. 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $V_\lambda\subset U_\alpha$ となる α が存在するとき, $\{V_\lambda\}_{\lambda\in\Lambda}$ を $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の細分という.
X は Hausdorff で, 任意の開被覆に対してその細分となる局所有限な開被覆が存在するとき, パラコンパクトであるという.

注意 多様体を扱う場合はパラコンパクト性を仮定することが多い.
また, コンパクト Hausdorff 空間はパラコンパクトである.

上の定理に現れた1の分割は次のように一般化して定義することができる.

定義 M を C^r 級多様体, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ を M の開被覆とする. M 上の C^r 級関数の族 $\{f_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ で, 次の (1)〜(3) をみたすものを $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ に従属する1の分割という.

(1) 任意の $i\in\mathbf{N}$ および任意の $p\in M$ に対して $0\leq f_i(p)\leq 1$.
(2) $\{\mathrm{supp}\,(f_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ は M の局所有限な被覆で, $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ の細分.
(3) 任意の p に対して $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(p)=1$.

注意 (2) の条件より, 各 $p\in M$ に対して $f_i(p)$ は有限個の i を除いて 0 である. よって, (3) の無限和は実質的には有限和である.

パラコンパクト多様体に対して次がなりたつ.

定理 パラコンパクト多様体の任意の開被覆に対して, その開被覆に従属する1の分割が存在する.

上の定理を用いると, 被覆する開集合が可算個の場合は次がなりたつことが分かる.

定理 M をパラコンパクト C^r 級多様体, $\{U_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ を M の開被覆とする. このとき, 次の (1)〜(3) をみたす M 上の C^r 級関数の族 $\{f_i\}_{i\in\mathbf{N}}$ が存在する.

(1) 任意の $i\in\mathbf{N}$ および任意の $p\in M$ に対して $0\leq f_i(p)\leq 1$.
(2) $\{\mathrm{supp}\,(f_i)\}_{i\in\mathbf{N}}$ は局所有限で, 任意の $i\in\mathbf{N}$ に対して $\mathrm{supp}\,(f_i)\subset U_i$.
(3) 任意の p に対して $\sum\limits_{i=1}^{\infty} f_i(p)=1$.

上の定理は被覆する開集合が有限個でもよい. この事実を用いた応用を1つ述べよう.

例 $(M,\mathcal{S})$ を n 次元コンパクト C^r 級多様体とする. ただし, $r\geq 1$ とする.
M はコンパクトだから, 有限個の M の座標近傍 $\{(U_i,\varphi_i)\}_{i=1}^{l}$ を選び, $\{U_i\}_{i=1}^{l}$ を M の開被覆とすることができる.
ここで, $\{f_i\}_{i=1}^{l}$ をこの有限開被覆に従属する1の分割とすると, M から $\mathbf{R}^{(n+1)l}$ への写像 g を

$$g=(f_1,\ldots,f_l,f_1\varphi_1,\ldots,f_l\varphi_l)$$

により定めることができる.
このとき, g は M から $\mathbf{R}^{(n+1)l}$ への C^r 級の埋め込みとなることが分かる.

問題 11

1. M をパラコンパクト C^r 級多様体とする.

(1) A を M の閉集合, U を $A \subset U$ となる M の開集合とする. このとき, 次の (i)〜(iii) をみたす $f \in C^r(M)$ が存在することを示せ.

(i) 任意の $p \in M$ に対して $0 \leq f(p) \leq 1$.

(ii) 任意の $p \in A$ に対して $f(p) = 1$.

(iii) $\mathrm{supp}\,(f) \subset U$.

(2) A, B を互いに交わらない, 空でない M の閉集合とする. このとき, 上の (i), (ii) および次の (iv) をみたす $f \in C^r(M)$ が存在することを示せ.

(iv) 任意の $p \in B$ に対して $f(p) = 0$.

2. M をパラコンパクト C^r 級多様体, A, B を互いに交わらない, 空でない M の閉集合, U, V を $A \subset U$, $B \subset V$ となる M の開集合とし, $f \in C^r(U)$, $g \in C^r(V)$ とする.

(1) M の開集合 W_1, W_2, W_3 を

$$W_1 = U \setminus B,\ W_2 = V \setminus A,\ W_3 = M \setminus (A \cup B)$$

により定める. $\{W_1, W_2, W_3\}$ は M の開被覆であることを示せ.

(2) M 上の C^r 級関数 h で,

$$h|_A = f|_A,\ h|_B = g|_B$$

となるものが存在することを示せ.

3. M をパラコンパクト C^r 級多様体, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ を互いに交わらない, 空でない M の閉集合とする.

(1) M の開集合 $U_1, U_2, \ldots, U_k$ を

$$U_i = M \setminus \bigcup_{j \neq i} A_j \quad (i = 1, 2, \ldots, k)$$

により定める. $\{U_i\}_{i=1}^k$ は M の開被覆であることを示せ.

(2) $a_1, a_2, \ldots, a_k \in \mathbf{R}$ とする. このとき, 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して

$$f_i(p) = a_i \quad (p \in A_i)$$

となる $f_1, f_2, \ldots, f_k \in C^r(M)$ が存在することを示せ.

問題 11 の解答

1. (1) $V = M \setminus A$ とおく.
このとき, V は M の開集合で, $M = U \cup V$.
よって, $\{U, V\}$ に従属する 1 の分割 $\{f, g\}$ が存在する. すなわち, $f, g \in C^r(M)$ で, 次の (a)〜(c) がなりたつ.

(a) 任意の $p \in M$ に対して $0 \leq f(p) \leq 1$, $0 \leq g(p) \leq 1$.
(b) $\mathrm{supp}\,(f) \subset U$, $\mathrm{supp}\,(g) \subset V$.
(c) 任意の $p \in M$ に対して $f(p) + g(p) = 1$.

(b) より,

$$\mathrm{supp}\,(g) \subset M \setminus A$$

だから, $p \in A$ とすると, $g(p) = 0$.
よって, (c) より, $p \in A$ とすると, $f(p) = 1$.
したがって, f は (i)〜(iii) をみたす.

(2) $U = M \setminus B$ とおく.
$A \cap B = \emptyset$ だから, $A \subset U$.
よって, (1) より, (i)〜(iii) をみたす $f \in C^r(M)$ が存在する.
このとき,

$$\mathrm{supp}\,(f) \subset M \setminus B$$

だから, $p \in B$ とすると, $f(p) = 0$.
したがって, f は (i), (ii) および (iv) をみたす.

2. (1) $p \in M$ とすると, $A \cap B = \emptyset$ だから, 次の (i)〜(iii) の何れか 1 つのみがなりたつ.

(i) $p \in A$, $p \notin B$.
(ii) $p \in B$, $p \notin A$.
(iii) $p \in M \setminus (A \cup B)$.

(i) のとき, $A \subset U$ だから, $p \in U \setminus B$. すなわち, $p \in W_1$.
(ii) のとき, $B \subset V$ だから, $p \in V \setminus A$. すなわち, $p \in W_2$.
(iii) のとき, $p \in W_3$.
よって, $\{W_1, W_2, W_3\}$ は M の開被覆.

(2) $\{W_1, W_2, W_3\}$ は M の有限開被覆だから, 次の (a)〜(b) をみたす 1 の分割 $\{h_1, h_2, h_3\}$ が存在する.

(a) 任意の $p \in M$ に対して $0 \leq h_i(p) \leq 1$ $(i = 1, 2, 3)$.
(b) $\mathrm{supp}\,(h_i) \subset W_i$ $(i = 1, 2, 3)$.
(c) 任意の $p \in M$ に対して $h_1(p) + h_2(p) + h_3(p) = 1$.

W_1, W_2, W_3 の定義および (b) より,

$$h_1(p) = 0\ (p \in B),\ \ h_2(p) = 0\ (p \in A),\ \ h_3(p) = 0\ (p \in A \cup B).$$

よって, (c) より,

$$h_1(p) = 1\ (p \in A),\ \ h_2(p) = 1\ (p \in B). \tag{$*$}$$

ここで,

$$h = fh_1 + gh_2$$

とおく. ただし, $p \in M \setminus U$ のときは $(fh_1)(p) = 0$, $p \in M \setminus V$ のときは $(gh_2)(p) = 0$ とする.
このとき, (b) より, $h \in C^r(M)$.
また, $(*)$ より,

$$h|_A = f|_A, \ h|_B = g|_B.$$

3. (1) $p \in M$ とすると, $A_1, A_2, \ldots, A_k$ は互いに交わらないから, ある $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して $p \in A_i$ となるか, または $p \in M \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j$.
$p \in A_i$ のとき, $A_i \subset U_i$ だから, $p \in U_i$.
$p \in M \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j$ のとき, 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して

$$\bigcup_{j \neq i} A_j \subset \bigcup_{j=1}^k A_j.$$

よって,

$$\begin{aligned} p &\in M \setminus \bigcup_{j=1}^k A_j \\ &\subset M \setminus \bigcup_{j \neq i} A_j \\ &= U_i. \end{aligned}$$

したがって, $\{U_i\}_{i=1}^k$ は M の開被覆.
(2) $\{U_i\}_{i=1}^k$ は M の有限開被覆だから, 次の (i)〜(iii) をみたす 1 の分割 $\{f_i\}_{i=1}^k$ が存在する.

(i) 任意の $p \in M$ に対して $0 \leq f_i(p) \leq 1$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.
(ii) $\mathrm{supp}\,(f_i) \subset U_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$.
(iii) 任意の $p \in M$ に対して $\sum_{i=1}^k f_i(p) = 1$.

U_i の定義および (ii) より, 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して $j \in \{1, 2, \ldots, k\}$, $j \neq i$ とすると,

$$f_i(p) = 0 \quad (p \in A_j).$$

よって, (iii) より, 任意の $i \in \{1, 2, \ldots, k\}$ に対して

$$f_i(p) = 1 \quad (p \in A_i).$$

したがって,

$$f = \sum_{i=1}^k a_i f_i$$

とおけばよい.