§12. 多様体上の積分

Euclid 空間上の微分形式の積分を一般化し, 多様体上の微分形式の積分を考えることができる. まず, 微分形式の台というものを定義しよう. 簡単のため, ここでは C^∞ 級多様体上の C^∞ 級微分形式を考えることにする.

定義 M を n 次元 C^∞ 級多様体とし, M 上の C^∞ 級微分形式 ω に対して

$$\mathrm{supp}\,(\omega) = \overline{\{p \in M | \omega_p \neq 0\}}$$

とおく. $\mathrm{supp}\,(\omega)$ を ω の台という.

なお, ω が 0 次微分形式, すなわち関数の場合は上の定義は §11 において定義したものと一致する.
多様体上の微分形式の積分を一般に定義する前に, 次のような簡単な場合を考えてみよう.
$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^∞ 級多様体とし, $\omega \in D^n(M)$ とする.
ここで, ある $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ が存在し, $\overline{U}$ はコンパクトで,

$$\mathrm{supp}\,(\omega) \subset U$$

がなりたっていると仮定しよう.
φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくと, ω は U 上で

$$\omega = f dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

と表すことができる.
このとき, ω の積分を

$$\int_M \omega = \int_{\varphi(U)} f dx_1 dx_2 \cdots dx_n$$

により定める.
右辺は座標近傍の選び方に依存する式であるから, 定義が well-defined となるかどうかを確かめる必要があることに注意しよう.
そこで, $(V, \psi) \in \mathcal{S}$ も $\overline{V}$ はコンパクトで,

$$\mathrm{supp}\,(\omega) \subset V$$

をみたしていると仮定する.
ψ を

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておくと, ω は V 上で

$$\omega = g dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n$$

と表すことができる.
§10 において扱ったように, $U \cap V$ 上で

$$dy_j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial y_j}{\partial x_i} dx_i$$

だから,

$$
\begin{aligned}
dy_1 \wedge dy_2 \wedge \cdots \wedge dy_n &= \left(\sum_{i_1=1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_1}} dx_{i_1} \right) \wedge \left(\sum_{i_2=1}^{n} \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_2}} dx_{i_2} \right) \wedge \cdots \wedge \left(\sum_{i_n=1}^{n} \frac{\partial y_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_n} \right) \\
&= \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_{i_n}} dx_{i_1} \wedge dx_{i_2} \wedge \cdots \wedge dx_{i_n}.
\end{aligned}
$$

ここで, n 文字の置換 σ の符号を $\mathrm{sgn}\,\sigma$ と表すと, 最後の式は外積の交代性および行列式の定義より,

$$
\begin{aligned}
&\sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n = 1}^{n} \mathrm{sgn} \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_{i_1}} \frac{\partial y_2}{\partial x_{i_2}} \cdots \frac{\partial y_n}{\partial x_{i_n}} dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n \\
&= \det(\psi \circ \varphi^{-1})' dx_1 \wedge dx_2 \wedge \cdots \wedge dx_n.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
g \det(\psi \circ \varphi^{-1})' = f
$$

がなりたつ.
一方, 微分積分において扱う変数変換公式より,

$$
\int_{\psi(U \cap V)} g dy_1 dy_2 \cdots dy_n = \int_{\varphi(U \cap V)} g \left| \det(\psi \circ \varphi^{-1})' \right| dx_1 dx_2 \cdots dx_n.
$$

したがって, $\det(\psi \circ \varphi^{-1})' > 0$ ならば, ω の $U \cap V$ 上の積分は座標近傍の選び方に依存しない.
そこで, 次のように定義する.

定義　M を C^∞ 級多様体とする. M の C^∞ 級座標近傍系 $\mathcal{S}$ が存在し, $U \cap V \neq \emptyset$ となる任意の $(U, \varphi), (V, \psi) \in \mathcal{S}$ に対して, $U \cap V$ 上で $\det(\psi \circ \varphi^{-1})' > 0$ がなりたつとき, M は向き付け可能であるという.
上のような座標近傍系があたえられているとき, M は向き付けられているという.

注意　n 次元多様体は 0 にならない n 次微分形式が存在するとき, 向き付け可能であると定義することもある. パラコンパクト多様体に対しては, §11 において扱った 1 の分割を用いることにより, 上の 2 つの定義は同値となることが分かる.
また, 向き付け可能な多様体は 2 通りの向き付けをあたえることができる.

例　$\mathbf{R}^n$ は 1 つの座標近傍で覆われるから向き付け可能である.

例　S^n のように 2 つの座標近傍で覆われる多様体も向き付け可能である.
例えば, 局所座標系 φ, ψ に対して $\det(\psi \circ \varphi^{-1})' < 0$ となっていても, どちらかの局所座標系の成分のうちの 1 つを -1 倍してしまえばよい.

例 (Möbius の帯)
Möbius の帯は大雑把に言えば, 長方形を一度ねじってから, 端を繋ぎ合わせて得られる図形である.
Möbius の帯は向き付け可能ではない 2 次元多様体となることが分かる.

例　$\mathbf{R}P^n$ は n が奇数のときは向き付け可能であるが, n が偶数のときは向き付け可能ではないことが分かる.

§11 において扱った 1 の分割を用いることにより, 向き付けられたパラコンパクト多様体上のコンパクトな台をもつ微分形式の積分を定義することができる.

M を向き付けられた n 次元パラコンパクト C^∞ 級多様体とし, $\omega \in D^n(M)$ で, ω の台はコンパクトであるとする.
$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の向き付けをあたえる座標近傍系とする.
M はパラコンパクトであるから, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する 1 の分割 $\{f_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ が存在する.
このとき, ω の積分を

$$\int_M \omega = \sum_{i=1}^{\infty} \int_M f_i \omega$$

により定める.
右辺は座標近傍系や 1 の分割の選び方に依存する式であるが, 定義は well-defined であることが分かる.

定理　M を向き付けられた n 次元パラコンパクト C^∞ 級多様体とし, $\omega, \theta \in D^n(M)$ で, ω, θ の台はコンパクトであるとする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.

(1) $a, b \in \mathbf{R}$ とすると, $\displaystyle\int_M (a\omega + b\theta) = a\int_M \omega + b\int_M \theta.$

(2) M の向き付けを逆にした多様体, すなわちもう 1 つの向き付けを考えた多様体を $-M$ と表すと, $\displaystyle\int_{-M} \omega = -\int_M \omega.$

ここまで扱ってきた多様体はいわば $\mathbf{R}^n$ の開集合を張り合わせて得られる位相空間であるが, $\mathbf{R}^n$ の開集合の代わりに $\mathbf{R}^n$ の半空間の開集合を考えることができる. ただし, $\mathbf{R}^n$ の半空間 H^n は

$$H^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_n \geq 0\}$$

により定められる $\mathbf{R}^n$ の部分空間である. H^n の開集合を張り合わせることにより得られる多様体を境界付き多様体という. 境界付き多様体の境界は次元の 1 つ低い多様体となる.

例　H^n 自身は n 次元 C^∞ 級境界付き多様体となる.
H^n の境界は

$$\partial H^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, 0) | (x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}) \in \mathbf{R}^{n-1}\}$$

で, これは $\mathbf{R}^{n-1}$ と同一視することができる.

例 (単位球体)
$\mathbf{R}^n$ の部分集合 B^n を

$$B^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbf{R}^n | x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1\}$$

により定める.
このとき, B^n は n 次元 C^∞ 級境界付き多様体となる. B^n を n 次元単位球体という.
B^n の境界は $(n-1)$ 次元球面 S^{n-1} である.

M を向き付けられた n 次元パラコンパクト C^∞ 級境界付き多様体とする. このとき, M の境界 ∂M に対しても自然な向き付けをあたえることができる.
ここで, $\omega \in D^{n-1}(M)$ で, ω の台はコンパクトであるとし, ι を ∂M から M への包含写像とする.

Stokes の定理　$\displaystyle\int_M d\omega = \int_{\partial M} \iota^* \omega.$

微分形式の積分や Stokes の定理は一般の k 次微分形式に対しても考えることができる.

問題 12

1. 2 次元単位円板, すなわち B^2 を

$$B^2 = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$$

と表しておき, $\omega \in D^1(B^2)$ を

$$\omega = -ydx + xdy$$

により定める.

(1) $d\omega$ を求めよ.

(2) B^2 の境界 S^1 に対して B^2 の境界としての向き付けを考え, ι を S^1 から B^2 への包含写像とする. 積分 $\displaystyle\int_{S^1} \iota^*\omega$ の値を求めよ.

(3) $N = (0, 1)$ とおき, $\mathbf{R}$ から $S^1 \setminus \{N\}$ への全単射 γ_N を

$$\gamma_N(s) = \left(\frac{2s}{s^2+1}, \frac{s^2-1}{s^2+1}\right) \quad (s \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, $(S^1 \setminus \{N\}, \gamma_N^{-1})$ は S^1 の座標近傍となり, 問題 10 において扱ったように, この座標近傍を用いると,

$$\iota^*\omega = \frac{2}{s^2+1} ds$$

と表すことができる. 広義積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}} \iota^*\omega$ の値を求めよ.

2. 3 次元単位球体 B^3 を

$$B^3 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$$

と表しておき, $\omega \in D^2(B^3)$ を

$$\omega = xdy \wedge dz + ydz \wedge dx + zdx \wedge dy$$

により定める.

(1) $d\omega$ を求めよ.

(2) B^3 の境界 S^2 に対して B^3 の境界としての向き付けを考え, ι を S^2 から B^3 への包含写像とする. 積分 $\displaystyle\int_{S^2} \iota^*\omega$ の値を求めよ.

(3) $N = (0, 0, 1)$ とおき, $\mathbf{R}^2$ から $S^2 \setminus \{N\}$ への全単射 f を

$$f(s, t) = \left(\frac{2s}{s^2+t^2+1}, \frac{2t}{s^2+t^2+1}, \frac{s^2+t^2-1}{s^2+t^2+1}\right) \quad ((s, t) \in \mathbf{R}^2)$$

により定めると, $(S^2 \setminus \{N\}, f^{-1})$ は S^2 の座標近傍となる. この座標近傍を用いて $\iota^*\omega$ を表せ.

なお, この座標近傍を用いると, 広義重積分 $\displaystyle\int_{\mathbf{R}^2} \iota^*\omega$ の値は (2) で求めた値の -1 倍となることが分かる.

問題 12 の解答

1. (1) 外微分の定義より,

$$
\begin{aligned}
d\omega &= -dy \wedge dx + dx \wedge dy \\
&= 2dx \wedge dy.
\end{aligned}
$$

(2) Stokes の定理と (1) より,

$$
\begin{aligned}
\int_{S^1} \iota^* \omega &= \int_{B^2} d\omega \\
&= \int_{B^2} 2dx \wedge dy \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

(3) 直接計算すると,

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbf{R}} \iota^* \omega &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{2}{s^2+1} ds \\
&= 2 \left[\tan^{-1} s \right]_{-\infty}^{+\infty} \\
&= 2 \left\{ \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) \right\} \\
&= 2\pi.
\end{aligned}
$$

2. (1) 外微分の定義より,

$$
\begin{aligned}
d\omega &= dx \wedge dy \wedge dz + dy \wedge dz \wedge dx + dz \wedge dx \wedge dy \\
&= 3dx \wedge dy \wedge dz.
\end{aligned}
$$

(2) Stokes の定理と (1) より,

$$
\begin{aligned}
\int_{S^2} \iota^* \omega &= \int_{B^3} d\omega \\
&= \int_{B^3} 3dx \wedge dy \wedge dz \\
&= 3 \cdot \frac{4\pi}{3} \\
&= 4\pi.
\end{aligned}
$$

(3) まず,

$$
\begin{aligned}
&\frac{\partial f}{\partial s} \\
&= \left(\frac{2(s^2+t^2+1) - 2s \cdot 2s}{(s^2+t^2+1)^2}, -\frac{2t \cdot 2s}{(s^2+t^2+1)^2}, \frac{2s(s^2+t^2+1) - (s^2+t^2-1) \cdot 2s}{(s^2+t^2+1)^2} \right) \\
&= \left(\frac{2(-s^2+t^2+1)}{(s^2+t^2+1)^2}, -\frac{4st}{(s^2+t^2+1)^2}, \frac{4s}{(s^2+t^2+1)^2} \right).
\end{aligned}
$$

同様に,

$$
\frac{\partial f}{\partial t} = \left(-\frac{4st}{(s^2+t^2+1)^2}, \frac{2(s^2-t^2+1)}{(s^2+t^2+1)^2}, \frac{4t}{(s^2+t^2+1)^2} \right).
$$

よって,

$$
\begin{aligned}
&(\iota^*\omega)\left(\frac{\partial}{\partial s}, \frac{\partial}{\partial t}\right)\\
&= \omega\left((d\iota)\left(\frac{\partial}{\partial s}\right), (d\iota)\left(\frac{\partial}{\partial t}\right)\right)\\
&= \omega\left(\frac{\partial(\iota \circ f)}{\partial s}, \frac{\partial(\iota \circ f)}{\partial t}\right)\\
&= \left(\frac{2s}{s^2+t^2+1}dy \wedge dz + \frac{2t}{s^2+t^2+1}dz \wedge dx + \frac{s^2+t^2-1}{s^2+t^2+1}dx \wedge dy\right)\\
&\quad \left(\frac{2(-s^2+t^2+1)}{(s^2+t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial x} - \frac{4st}{(s^2+t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{4s}{(s^2+t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial z},\right.\\
&\quad\quad \left. -\frac{4st}{(s^2+t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{2(s^2-t^2+1)}{(s^2+t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{4t}{(s^2+t^2+1)^2}\frac{\partial}{\partial z}\right)\\
&= \frac{1}{(s^2+t^2+1)^5}\left[2s\{-4st \cdot 4t - 4s \cdot 2(s^2-t^2+1)\}\right.\\
&\qquad\qquad\qquad + 2t\{-2(-s^2+t^2+1) \cdot 4t + 4s(-4st)\}\\
&\qquad\qquad\qquad \left. +(s^2+t^2-1)\{2(-s^2+t^2+1) \cdot 2(s^2-t^2+1) - 4st \cdot 4st\}\right].
\end{aligned}
$$

ここで,

$$X = s^2 + t^2$$

とおくと,

$$
\begin{aligned}
\text{分子} &= -16s^2(X+1) - 16t^2(X+1) + 4(X-1)\left[\{1-(s^2-t^2)^2\} - 4s^2t^2\right]\\
&= -16X(X+1) + 4(X-1)(1-X^2)\\
&= -4X^3 - 12X^2 - 12X - 4\\
&= -4(X+1)^3.
\end{aligned}
$$

したがって,

$$
\begin{aligned}
\iota^*\omega &= \frac{-4(X+1)^3}{(X+1)^5}ds \wedge dt\\
&= -\frac{4}{(s^2+t^2+1)^2}ds \wedge dt.
\end{aligned}
$$