§2. アファイン接続

Euclid 空間上のベクトル場は単に関数を幾つか並べたものとみなすことができるから, その微分は普通の関数の微分のように行うことができる. これを多様体上のベクトル場に対して一般化し, アファイン接続というものを考えることができる. C^∞ 級多様体 M に対して, M 上の C^∞ 級関数全体の集合を $C^\infty(M)$ と表すことにする.

定義 M を C^∞ 級多様体, ∇ を $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$ を対応させる写像

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

とする. 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ と任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して次の (1)〜(4) がなりたつとき, ∇ を M のアファイン接続という. また, $\nabla_Y X$ を X の Y に関する共変微分という.

(1) $\nabla_{Y+Z}X = \nabla_Y X + \nabla_Z X$.
(2) $\nabla_{fY}X = f\nabla_Y X$.
(3) $\nabla_Z(X+Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y$.
(4) $\nabla_Y(fX) = (Yf)X + f\nabla_Y X$.

なお, (2) より, 各 $p \in M$ において ∇X は T_pM の線形変換を定めることが分かる. よって, $v \in T_pM$ に対して $\nabla_v X \in T_pM$ を定めることができる.
M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする.
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $T(X,Y) \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

により定める.
ここで, $f, g \in C^\infty(M)$ とすると,

$$[fX, gY] = fg[X,Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

がなりたつ. 特に, $g = 1$ とし, (2), (4) を用いると,

$$\begin{aligned} T(fX,Y) &= \nabla_{fX}Y - \nabla_Y(fX) - [fX,Y] \\ &= f\nabla_X Y - \{(Yf)X + f\nabla_Y X\} - \{f[X,Y] - (Yf)X\} \\ &= fT(X,Y). \end{aligned}$$

同様に,

$$T(X, fY) = fT(X,Y).$$

これらのことより, T は各 $p \in M$ において双線形写像

$$T_p : T_pM \times T_pM \to T_pM$$

を定めることが分かる. すなわち, T は $(1,2)$ 型のテンソル場である.
また, T は交代的である. すなわち

$$T(X,Y) = -T(Y,X)$$

がなりたつ. T を捩率テンソル場または単に捩率という. $T = 0$ となるとき, ∇ は捩れがないなどという.

Riemann 多様体に対しては次のようなアファイン接続を考えることが多い.

定義 (M, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を M のアファイン接続とする. 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$$

がなりたつとき, ∇ は g を保つ, または計量的であるという.

特に, 次の定理のように特徴付けられるアファイン接続が重要である.

定理 (M, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体とする. このとき, g に関して計量的で捩れのない M のアファイン接続が一意的に存在する.

上の定理に現れたアファイン接続を Levi-Civita 接続という.
多様体のアファイン接続に対して曲率というものを考えることができる.
M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする.
$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $R(X, Y)Z \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z$$

により定める.
定義より,

$$R(X, Y)Z = -R(Y, X)Z \tag{$*$}$$

がなりたつことは明らかである.
更に, 次がなりたつ.

定理 $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とすると,

$$R(fX, Y)Z = R(X, fY)Z = R(X, Y)(fZ) = fR(X, Y)Z.$$

証明 まず,

$$\begin{aligned}
R(fX, Y)Z &= \nabla_{fX} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX} Z - \nabla_{[fX,Y]} Z \\
&= f\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y (f\nabla_X Z) - \nabla_{f[X,Y]-(Yf)X} Z \\
&= f\nabla_X \nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{f[X,Y]} Z + \nabla_{(Yf)X} Z \\
&= f\nabla_X \nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - f\nabla_{[X,Y]} Z + (Yf)\nabla_X Z \\
&= fR(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

$(*)$ と合わせると,

$$R(X, fY)Z = fR(X, Y)Z.$$

次に,

$$\begin{aligned}
R(X, Y)(fZ) &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X,Y]} (fZ) \\
&= \nabla_X ((Yf)Z + f\nabla_Y Z) - \nabla_Y ((Xf)Z + f\nabla_X Z) - ([X, Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= (XYf)Z + (Yf)\nabla_X Z + (Xf)\nabla_Y Z + f\nabla_X \nabla_Y Z \\
&\quad - (YXf)Z - (Xf)\nabla_Y Z - (Yf)\nabla_X Z - f\nabla_Y \nabla_X Z - ([X, Y]f)Z - f\nabla_{[X,Y]} Z \\
&= fR(X, Y)Z.
\end{aligned}$$

□

上の定理より, R は各 $p \in M$ において $T_pM \times T_pM \times T_pM$ から T_pM への多重線形写像を定める. すなわち, R は $(1,3)$ 型のテンソル場である. R を ∇ の曲率テンソルまたは曲率という.
Riemann 計量を保つアファイン接続に関しては次がなりたつ.

定理 (M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を M のアファイン接続, R を ∇ の曲率とする. ∇ が g に関して計量的ならば, 任意の $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$g(R(X,Y)Z,W) + g(Z,R(X,Y)W) = 0.$$

証明 括弧積の定義と仮定より,

$$\begin{aligned}
0 &= XYg(Z,W) - YXg(Z,W) - [X,Y]g(Z,W) \\
&= X\left(g(\nabla_Y Z,W) + g(Z,\nabla_Y W)\right) - Y\left(g(\nabla_X Z,W) + g(Z,\nabla_X W)\right) \\
&\quad - g(\nabla_{[X,Y]}Z,W) - g(Z,\nabla_{[X,Y]}W) \\
&= g(\nabla_X\nabla_Y Z,W) + g(\nabla_Y Z,\nabla_X W) + g(\nabla_X Z,\nabla_Y W) + g(Z,\nabla_X\nabla_Y W) \\
&\quad - g(\nabla_Y\nabla_X Z,W) - g(\nabla_X Z,\nabla_Y W) - g(\nabla_Y Z,\nabla_X W) - g(Z,\nabla_Y\nabla_X W) \\
&\quad - g(\nabla_{[X,Y]}Z,W) - g(Z,\nabla_{[X,Y]}W) \\
&= g(R(X,Y)Z,W) + g(Z,R(X,Y)W).
\end{aligned}$$

□

更に, Levi-Civita 接続の曲率に関しては次がなりたつ.

定理 (M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を (M,g) の Levi-Civita 接続, R を ∇ の曲率とする. このとき, 任意の $X,Y,Z,W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$ (Bianchi の第一恒等式).
(2) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$.

証明 (1) のみ示す.
∇ は Levi-Civita 接続だから, 捩率は 0 である.
よって,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z &= \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X(\nabla_Z Y + [Y,Z]) - \nabla_Y(\nabla_Z X + [X,Z]) - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&= \nabla_X\nabla_Z Y + \nabla_{[Y,Z]}X + [X,[Y,Z]] - \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_{[X,Z]}Y - [Y,[X,Z]] - \nabla_{[X,Y]}Z.
\end{aligned}$$

したがって, Jacobi の恒等式より,

$$\begin{aligned}
R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y &= R(X,Y)Z + \nabla_Y\nabla_Z X - \nabla_Z\nabla_Y X - \nabla_{[Y,Z]}X \\
&\quad + \nabla_Z\nabla_X Y - \nabla_X\nabla_Z Y - \nabla_{[Z,X]}Y \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] - \nabla_{[X,Y]}Z \\
&\quad - \nabla_Z\nabla_Y X + \nabla_Z\nabla_X Y \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] - \nabla_{[X,Y]}Z + \nabla_Z[X,Y] \\
&= [X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] \\
&= 0.
\end{aligned}$$

□

関連事項 2. Bianchi の第二恒等式

Levi-Civita 接続の曲率に対して, その共変微分を考えることができる. このとき, Bianchi の第二恒等式というものがなりたつ.
(M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を (M,g) の Levi-Civita 接続, R を ∇ の曲率とする. このとき, $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, R の X に関する共変微分 $\nabla_X R$ を

$$\nabla_X(R(Y,Z)W) = (\nabla_X R)(Y,Z)W + R(\nabla_X Y, Z)W + R(Y, \nabla_X Z)W + R(Y,Z)\nabla_X W$$

により定めることができる. ただし, $Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ である. $\nabla_X R$ は $(1,3)$ 型のテンソル場となる.
曲率の共変微分に関して Bianchi の第二恒等式

$$(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W = 0$$

がなりたつことを示そう.
まず, 共変微分の定義より,

$$\begin{aligned}
(\nabla_X R)(Y,Z)W &= \nabla_X(R(Y,Z)W) - R(\nabla_X Y, Z)W - R(Y, \nabla_X Z)W - R(Y,Z)\nabla_X W \\
&= \nabla_X(\nabla_Y\nabla_Z W - \nabla_Z\nabla_Y W - \nabla_{[Y,Z]}W) - R(\nabla_X Y, Z)W + R(\nabla_X Z, Y)W \\
&\quad - (\nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W - \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W - \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W) \\
&= \nabla_X\nabla_Y\nabla_Z W - \nabla_X\nabla_Z\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_Z\nabla_X W + \nabla_Z\nabla_Y\nabla_X W \\
&\quad - \nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W - R(\nabla_X Y, Z)W + R(\nabla_X Z, Y)W.
\end{aligned}$$

最後の式の第 1 項から第 4 項までは X, Y, Z をそれぞれ Y, Z, X あるいは Z, X, Y に置き換えて足し合わせると 0 となることと Levi-Civita 接続は捩れをもたないことに注意し, Jacobi の恒等式を用いると,

$$\begin{aligned}
&(\nabla_X R)(Y,Z)W + (\nabla_Y R)(Z,X)W + (\nabla_Z R)(X,Y)W \\
&\quad = -\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W - R(\nabla_X Y, Z)W + R(\nabla_X Z, Y)W \\
&\qquad - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W + \nabla_{[Z,X]}\nabla_Y W - R(\nabla_Y Z, X)W + R(\nabla_Y X, Z)W \\
&\qquad - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W + \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W - R(\nabla_Z X, Y)W + R(\nabla_Z Y, X)W \\
&\quad = -\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W - R(\nabla_X Y - \nabla_Y X, Z)W \\
&\qquad - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W + \nabla_{[Z,X]}\nabla_Y W - R(\nabla_Y Z - \nabla_Z Y, X)W \\
&\qquad - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W + \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W - R(\nabla_Z X - \nabla_X Z, Y)W \\
&\quad = -\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W - R([X,Y], Z)W \\
&\qquad - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W + \nabla_{[Z,X]}\nabla_Y W - R([Y,Z], X)W \\
&\qquad - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W + \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W - R([Z,X], Y)W \\
&\quad = -\nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W + \nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W - (\nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W - \nabla_{[[X,Y],Z]}W) \\
&\qquad - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W + \nabla_{[Z,X]}\nabla_Y W - (\nabla_{[Y,Z]}\nabla_X W - \nabla_X\nabla_{[Y,Z]}W - \nabla_{[[Y,Z],X]}W) \\
&\qquad - \nabla_Z\nabla_{[X,Y]}W + \nabla_{[X,Y]}\nabla_Z W - (\nabla_{[Z,X]}\nabla_Y W - \nabla_Y\nabla_{[Z,X]}W - \nabla_{[[Z,X],Y]}W) \\
&\quad = \nabla_{[[X,Y],Z]+[[Y,Z],X]+[[Z,X],Y]}W \\
&\quad = 0.
\end{aligned}$$

よって, Bianchi の第二恒等式が示された.