§3. 誘導接続

多様体から多様体への写像があたえられていると, 写像に沿うベクトル場を考えることができる.
M, N を C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像とする.
ここで, 各 $p \in M$ に対して $\xi(p) \in T_{f(p)}N$ が定められているとする. この対応を ξ と表し, f に沿うベクトル場という.
(V, ψ) を $f(p) \in V$ となる N の座標近傍とし,

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておくと,

$$\xi(p) = \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_{f(p)}$$

と表すことができる. 各 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ が C^∞ 級関数のとき, ξ は C^∞ 級であるという.
以下では f に沿う C^∞ 級のベクトル場を考え, これら全体の集合を $\mathfrak{X}_f(M, N)$ と表すことにする.

例 M, N を C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像とし, $X \in \mathfrak{X}(M)$ とする.
各 $p \in M$ に対して $(f_* X)(p) \in T_{f(p)}N$ を

$$(f_* X)(p) = (df)_p(X_p)$$

により定める. このとき, $f_* X \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ となる.
また, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ とし, 各 $p \in M$ に対して $(Y \circ f)(p) \in T_{f(p)}N$ を

$$(Y \circ f)(p) = Y_{f(p)}$$

により定める. このとき, $Y \circ f \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ となる.

更に, 値域の多様体にアファイン接続があたえられていると, 写像に沿う共変微分を定めることができる. すなわち, 写像に沿うベクトル場を写像の定義域上のベクトル場で共変微分することができる.

定理 M, N を C^∞ 級多様体, ∇ を N のアファイン接続, f を M から N への C^∞ 級写像とする.
このとき, 任意の $\xi \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ と任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla^f_X \xi \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ を対応させる写像

$$\nabla^f : \mathfrak{X}_f(M, N) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_f(M, N)$$

で次の (1)〜(5) をみたすものが一意的に存在する. ただし, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}_f(M, N)$, $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $\lambda \in C^\infty(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ である.

(1) $\nabla^f_{X_1 + X_2} \xi = \nabla^f_{X_1} \xi + \nabla^f_{X_2} \xi$.
(2) $\nabla^f_{\lambda X} \xi = \lambda \nabla^f_X \xi$.
(3) $\nabla^f_X (\xi_1 + \xi_2) = \nabla^f_X \xi_1 + \nabla^f_X \xi_2$.
(4) $\nabla^f_X (\lambda \xi) = (X\lambda)\xi + \lambda \nabla^f_X \xi$.
(5) $\nabla^f_X (Y \circ f) = \nabla_{f_* X} Y$.

∇^f を f による ∇ の誘導接続という.
なお, (2) より, 各 $p \in M$ において $\nabla^f \xi$ は T_pM から $T_{f(p)}N$ への線形写像を定めることが分かる. よって, $v \in T_pM$ に対して $\nabla^f_v \xi \in T_{f(p)}N$ を定めることができる.

例　M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とする．このとき, γ による誘導接続 ∇^γ が定められる．
$\xi \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ に対して

$$\nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \xi = 0$$

がなりたつとき, ξ は γ に沿って平行であるという．

部分多様体に対する包含写像による誘導接続を考えよう．
N を C^∞ 級多様体, M を N の C^∞ 級部分多様体, ι を M から N への包含写像とする．
各 $p \in M$ に対して p のおける ι の微分 $(d\iota)_p$ は単射であるから, T_pM を $(d\iota)_p$ による像と同一視することにより, T_pM は $T_{\iota(p)}N$ の部分空間とみなすことができる．よって, 自然な包含関係

$$\mathfrak{X}(M) \subset \mathfrak{X}_\iota(M, N)$$

が得られる．
更に, ∇ を N のアファイン接続とし, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とする．上の包含関係を用いて, 写像に沿う共変微分 $\nabla^\iota_Y(\iota_* X)$ を単に $\nabla^\iota_Y X$ と表すことにしよう．

定義　任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla^\iota_Y X \in \mathfrak{X}(M)$$

がなりたつとき, M は ∇ に関して自己平行であるという．

上の定義において, M が ∇ に関して自己平行ならば, ∇^ι は M のアファイン接続を定める．
更に,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^∞ 級曲線とし, $\xi \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ とする．
このとき, ξ が γ に沿って平行ならば, $\iota_*\xi \in \mathfrak{X}_{\iota\circ\gamma}(I, N)$ は $\iota \circ \gamma$ に沿って平行であることが分かる．これが自己平行という言葉の由来である．

例 (測地線)
M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする．
M の 1 次元部分多様体は M 上の C^∞ 級曲線

$$\gamma : I \to M$$

の像 $\gamma(I)$ として表すことができる．
ここで, $X, Y \in \mathfrak{X}_\gamma(I, M)$ を

$$X = \xi \frac{d}{dt},\ Y = \eta \frac{d}{dt}$$

と表しておこう．ただし, $\xi, \eta \in C^\infty(I)$ である．
このとき,

$$\begin{aligned}
\nabla^\gamma_Y X &= \nabla^\gamma_Y(\gamma_* X) \\
&= \nabla^\gamma_{\eta\frac{d}{dt}} \left(\xi \frac{d\gamma}{dt} \right) \\
&= \eta \left(\frac{d\xi}{dt} \frac{d\gamma}{dt} + \xi \nabla^\gamma_{\frac{d}{dt}} \frac{d\gamma}{dt} \right).
\end{aligned}$$

よって, $\gamma(I)$ が ∇ に関して自己平行であることと

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\frac{d\gamma}{dt}=\alpha\frac{d\gamma}{dt} \tag{$*$}$$

をみたす $\alpha\in C^{\infty}(I)$ が存在することとは同値である. $(*)$ をみたす γ を準測地線という.
ここで, 変数変換 $t=\varphi(s)$ を考えると,

$$\begin{aligned}\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\frac{d\gamma}{dt}&=\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\frac{d((\gamma\circ\varphi)\circ\varphi^{-1})}{dt}\\&=\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\frac{d\varphi^{-1}}{dt}\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}\\&=\frac{d^2\varphi^{-1}}{dt^2}\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}+\frac{d\varphi^{-1}}{dt}\nabla^{\gamma}_{\frac{d\varphi^{-1}}{dt}\frac{d}{ds}}\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}\\&=\frac{d^2\varphi^{-1}}{dt^2}\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}+\left(\frac{d\varphi^{-1}}{dt}\right)^2\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{ds}}\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}.\end{aligned}$$

一方,

$$\alpha\frac{d\gamma}{dt}=\alpha\frac{d\varphi^{-1}}{dt}\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}.$$

よって, φ を

$$\frac{d\varphi^{-1}}{dt}=\exp\int\alpha dt$$

により定めると, $(*)$ は

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{ds}}\frac{d(\gamma\circ\varphi)}{ds}=0$$

と同値である. このとき, $\gamma\circ\varphi$ を測地線という. すなわち, アファイン接続をもつ多様体上の準測地線は, 必要ならば変数変換を行うことにより, 測地線として表すことができる.

自己平行とは限らない部分多様体に対してもアファイン接続を定めることができる場合がある.
N を C^{∞} 級多様体, M を N の C^{∞} 級部分多様体, ∇ を N のアファイン接続とする.
ここで, 各 $p\in M$ に対して線形写像

$$\pi_p: T_{\iota(p)}N\to T_pM$$

で, 任意の $v\in T_pM$ に対して

$$\pi_p(v)=v$$

をみたすものがあたえられているとしよう. ただし, p から π_p への対応は C^{∞} 級のものを考えることにする.
このとき, $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(\nabla^{(\pi)}_Y X)_p=\pi_p((\nabla^{\iota}_Y X)_{\iota(p)})\quad(p\in M)$$

とおくと, $\nabla^{(\pi)}$ は M のアファイン接続を定めることが分かる.
特に, N に Riemann 計量 g があたえられているときは, g の定める正射影を用いて $\nabla^{(\pi)}$ を定めることができる. これを g による ∇ の M への射影という.

関連事項 3. アファイン変換

アファイン接続をもつ多様体から同じ多様体への微分同相写像に対して, アファイン変換というものを考えることができる.
まず, M を C^∞ 級多様体, f を M から M 自身への C^∞ 級微分同相写像とする.
このとき, $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して f に沿うベクトル場 f_*X を考えることができるが, f は微分同相写像であるから, f_*X は M 上のベクトル場ともみなすことができる. 以下では, 後者のように考えることにしよう.
更に, M のアファイン接続 ∇ があたえられているとする.
このとき, $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ から $f_*^{-1}(\nabla_{f_*Y} f_*X)$ への対応は M のアファイン接続を定めることが分かる. このアファイン接続が元のアファイン接続と変わらないとき, すなわち任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$f_*^{-1}(\nabla_{f_*Y} f_*X) = \nabla_Y X$$

がなりたつとき, f をアファイン変換という.
アファイン変換全体の集合は群となり, これをアファイン変換群という. 連結な多様体のアファイン変換群が Lie 群になることは Nomizu により示されている. 関連事項 1 において述べたことも思い出そう.
M が Riemann 多様体のとき，f が等長変換で ∇ が Levi-Civita 接続ならば, 上の $f_*^{-1}(\nabla_{f_*Y} f_*X)$ は計量的で捩れのない接続となることが分かる. よって, Levi-Civita 接続の一意性より, Riemann 多様体の等長変換は Levi-Civita 接続に関してアファイン変換である.
Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ に対しては標準的なアファイン接続を考えることができる. すなわち, $\mathbf{R}^n$ の直交座標 $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ に対して

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = 0 \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

により定まるアファイン接続 ∇ である.
標準的なアファイン接続 ∇ をもつ $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換がどのように表されるか調べてみよう.
f を $\mathbf{R}^n$ のアファイン変換とする. f を

$$f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

と表しておき, 値域の直交座標を $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ とする.
このとき,

$$\left(f_* \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_y = \sum_{r=1}^n \frac{\partial f_r}{\partial x_i}(f^{-1}(y)) \left(\frac{\partial}{\partial y_r} \right)_y \quad (y \in \mathbf{R}^n)$$

で, 直接計算すると,

$$\nabla_{f_* \frac{\partial}{\partial x_i}} f_* \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{r=1}^n \frac{\partial^2 f_r}{\partial x_i \partial x_j} \frac{\partial}{\partial y_r}$$

が得られる.
よって, 任意の $i, j = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = 0$$

となるから, f は $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の 1 次式である.
更に, f は微分同相写像であるから, f は n 次の正則行列 A と $b \in \mathbf{R}^n$ を用いて,

$$f(x) = xA + b \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表すことができる.