§9. α 接続

§6 において扱ったように, 統計的モデルは Fisher 計量に関して Riemann 多様体とみなすことができるから, Levi-Civita 接続を考えることができる. 更に, 統計的モデルに対しては実数のパラメータ α に対して, α 接続というアファイン接続を考えることができる.
まず, 多様体のアファイン接続を局所的に表してみよう.
M を n 次元 C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続, (U, φ) を M の座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく.
このとき, ∇ は U 上で

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \qquad (*)$$

と表すことができる. ただし, Γ_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2, \dots, n)$ は U 上で定義された C^∞ 級関数である. Γ_{ij}^k を Christoffel の記号という.

定理 ∇ が捩れのないアファイン接続ならば, 任意の $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ に対して

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

逆に, 任意の座標近傍に対して上の式がなりたつならば, ∇ は捩れをもたない.

証明 T を ∇ の捩率とする.
$i, j = 1, 2, \dots, n$ とすると,

$$\begin{aligned} T\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right) &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k\right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

□

次に, Riemann 多様体の Levi-Civita 接続を局所的に表してみよう.
(M, g) を n 次元 C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を M の Levi-Civita 接続とし, 上のように座標近傍を選んでおく.
∇ は計量的だから, $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ とし, $(*)$ を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) &= g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k}\right) \\ &= g\left(\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l}\right). \end{aligned}$$

よって, $g_{ij} = g\left(\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j}\right)$ とおくと,

$$\partial_i g_{jk} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l g_{jl}.$$

(g_{ij}) は正定値実対称行列に値をとり, ∇ は捩れをもたないから, 上の定理より,

$$\begin{aligned}\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij} &= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l g_{jl} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l g_{li} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ji}^l g_{kl} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= 2\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk}.\end{aligned}$$

(g^{ij}) を (g_{ij}) の逆行列とし, $m = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^n g^{km}(\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ki} - \partial_k g_{ij}) &= 2\sum_{k=1}^n g^{km} \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ &= 2\sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} \\ &= 2\sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \delta_{lm} \\ &= 2\Gamma_{ij}^m.\end{aligned}$$

ただし, δ_{lm} は Kronecker の δ である.
したがって, m を k, k を l と置き替えると,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^n g^{lk}(\partial_i g_{lj} + \partial_j g_{il} - \partial_l g_{ij}).$$

また,

$$\Gamma_{ij,k} = g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k}\right)$$

とおくと,

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij,k} &= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{l,m=1}^n g^{ml}(\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) g_{lk} \\ &= \frac{1}{2}\sum_{m=1}^n (\partial_i g_{mj} + \partial_j g_{im} - \partial_m g_{ij}) \delta_{mk} \\ &= \frac{1}{2}(\partial_i g_{kj} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}).\end{aligned}$$

$\Gamma_{ij,k}$ も Christoffel の記号という.
さて, 統計的モデルに対して Fisher 計量を考え, Levi-Civita 接続に対する Christoffel の記号を計算してみよう.
Ω を高々可算集合または $\mathbf{R}^k$ とし,

$$S = \{p(x;\xi) | \xi \in \Xi\}$$

を Ω 上の n 次元統計的モデルとする.

§6 において扱ったように, S を $\xi=(\xi_1,\xi_2,\ldots,\xi_n)$ を局所座標系とする n 次元多様体とみなすと, その Fisher 計量は

$$g_{ij}(\xi)=E_\xi[\partial_i l_\xi \partial_j l_\xi]=\int_\Omega \left(\frac{\partial}{\partial\xi_i}\log p(x;\xi)\right)\left(\frac{\partial}{\partial\xi_j}\log p(x;\xi)\right)p(x;\xi)dx \quad (i,j=1,2,\ldots,n)$$

によりあたえられるのであった.
$i,j,k=1,2,\ldots,n$ とすると,

$$\partial_k g_{ij}=E_\xi[(\partial_k\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)]+E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_k\partial_j l_\xi)]+E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)]$$

だから,

$$\begin{aligned}2\Gamma_{ij,k}&=\partial_i g_{kj}+\partial_j g_{ik}-\partial_k g_{ij}\\&=E_\xi[(\partial_i\partial_k l_\xi)(\partial_j l_\xi)]+E_\xi[(\partial_k l_\xi)(\partial_i\partial_j l_\xi)]+E_\xi[(\partial_k l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_i l_\xi)]\\&\quad+E_\xi[(\partial_j\partial_i l_\xi)(\partial_k l_\xi)]+E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_j\partial_k l_\xi)]+E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_k l_\xi)(\partial_j l_\xi)]\\&\quad-E_\xi[(\partial_k\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)]-E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_k\partial_j l_\xi)]-E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)]\\&=2E_\xi[(\partial_i\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)]+E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)].\end{aligned}$$

すなわち,

$$\begin{aligned}\Gamma_{ij,k}&=E_\xi[(\partial_i\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)]+\frac{1}{2}E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)]\\&=E_\xi\left[\left(\partial_i\partial_j l_\xi+\frac{1}{2}\partial_i l_\xi\partial_j l_\xi\right)(\partial_k l_\xi)\right].\end{aligned}$$

ここで,

$$T_{ijk}=E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)]$$

とおき, 変数変換 $\eta=\eta(\xi)$ を考えよう. 新しい局所座標系 η に対しても上と同様に $\tilde{T}_{rst}$ を定めると,

$$\begin{aligned}\tilde{T}_{rst}&=E_\eta[(\tilde{\partial}_r l_\eta)(\tilde{\partial}_s l_\eta)(\tilde{\partial}_t l_\eta)]\\&=\sum_{i,j,k=1}^n\frac{\partial\xi_i}{\partial\eta_r}\frac{\partial\xi_j}{\partial\eta_s}\frac{\partial\xi_k}{\partial\eta_t}T_{ijk}\end{aligned}$$

となるから, T_{ijk} は S 上の $(0,3)$ 型のテンソル場を定める.
よって, 任意の $\alpha\in\mathbf{R}$ に対して

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k}=E_\xi\left[\left(\partial_i\partial_j l_\xi+\frac{1-\alpha}{2}\partial_i l_\xi\partial_j l_\xi\right)(\partial_k l_\xi)\right]$$

とおくと, $\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k}$ は S のアファイン接続 $\nabla^{(\alpha)}$ を定める. $\nabla^{(\alpha)}$ を α 接続という.
特に, 0 接続 $\nabla^{(0)}$ は Fisher 計量に対する Levi-Civita 接続に他ならない.
また, 任意の $i,j,k=1,2,\ldots,n$ に対して

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k}=\Gamma^{(\alpha)}_{ji,k}$$

がなりたつから, 上の定理より, $\nabla^{(\alpha)}$ は捩れをもたない.

関連事項 9. Chentsov の定理

1 つの多様体に対して考えることのできる Riemann 計量やアファイン接続はもちろん一通りではない．それでは, 統計的モデルに対する Fisher 計量や α 接続はどのように特徴付けられるのであろうか.

まず, §8 において扱ったように, あたえられた統計的モデルから別の統計的モデルへの変換が十分統計量であるとき, Fisher 計量に対して不変性がなりたつのであった.

このとき, α 接続に対しても不変性がなりたつ．実際, 上の変換の下で確率関数または密度関数が $p(x;\xi)$ から $q(F(x);\xi)$ へ写されるとすると, F が十分統計量であることから,

$$\partial_i \log p(x;\xi) = \partial_i \log q(F(x);\xi)$$

がなりたち, それぞれの統計的モデルに対する α 接続の Christoffel の記号は一致するからである.

有限集合上の統計的モデルに対する Fisher 計量や α 接続は上に述べた不変性を用いて特徴付けることができる.

$n \in \mathbf{N}$ に対して

$$\Omega_n = \{0, 1, 2, \ldots, n\}$$

とおき, S_n を §5 において扱ったような Ω_n 上の n 次元統計的モデルとしよう．すなわち,

$$S_n = \{p(x;\xi) | \xi \in \Xi\}$$

で,

$$\Xi = \left\{ (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \,\middle|\, \xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n > 0,\ \sum_{i=1}^{n} \xi_i < 1 \right\},$$

また, $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) \in \Xi$ に対して

$$p(i;\xi) = \begin{cases} \xi_i & (i = 1, 2, \ldots, n), \\ 1 - \sum_{i=1}^{n} \xi_i & (i = 0) \end{cases}$$

である.

また, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して S_n の Riemann 計量 g_n とアファイン接続 ∇_n があたえられているとする.

ここで, Ω_n 上の統計的モデル S があたえられているとしよう．ただし, S は S_n の部分多様体であると仮定する．このとき, S の Riemann 計量とアファイン接続として, それぞれ g_n の誘導計量と ∇_n の誘導接続を考えることができる.

更に, $n \geq m$ をみたす $n, m \in \mathbf{N}$ に対して Ω_n から Ω_m への全射 F があたえられているとしよう．ただし, S と F により定まる統計的モデル S_F は S_m の部分多様体であると仮定する．このとき, S_F の Riemann 計量とアファイン接続として, それぞれ g_m の誘導計量と g_m による ∇_m の射影を考えることができる.

さて, $n \geq m$ となる任意の $n, m \in \mathbf{N}$ と Ω_n 上の任意の統計的モデル S と Ω_n から Ω_m への任意の全射 F に対して, F が S に関する十分統計量ならば, S と S_F の Riemann 計量とアファイン接続は不変であると仮定しよう．このとき, g_n は S_n 上の Fisher 計量の定数倍で, ∇_n は S_n の α 接続に一致することが分かる．この事実は Chentsov の定理として知られている.