§11. 統計多様体

統計的モデルのもつ微分幾何学的な構造を一般化し, 統計多様体というものを考えることができる.
まず, 多様体の Riemann 計量の一般化である非退化計量について述べよう.
M を C^∞ 級多様体, g を M 上の $(0,2)$ 型の対称テンソル場とする. すなわち, 各 $p \in M$ において双線形写像

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

があたえられ, 任意の $u, v \in T_pM$ に対して

$$g_p(u, v) = g_p(v, u)$$

がなりたち, 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して p から $g_p(X_p, Y_p)$ への対応は M 上の C^∞ 級関数を定める.

定義　g が非退化であるとき, すなわち, 任意の $p \in M$ において

$$g_p(u, v) = 0$$

が任意の $v \in T_pM$ に対してなりたつのは $u = 0$ のときに限るとき, g を M の擬 Riemann 計量または非退化計量という.

多様体の Riemann 計量は正定値な非退化計量に他ならない.
アファイン接続をもつ多様体に対して, 非退化計量があたえられると, 双対接続というアファイン接続を考えることができる.
M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続, g を M の非退化計量とする.
g は非退化であるから, $X, Z \in \mathfrak{X}(M)$ とすると, 任意の $Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$Xg(Y, Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla^*_X Z)$$

がなりたつように, $\nabla^*_X Z \in \mathfrak{X}(M)$ を定めることができる.

定理　∇^* は M のアファイン接続.

証明　$X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in C^\infty(M)$ とする.
∇^* が次の (1)〜(4) をみたすことを示せばよい.

(1) $\nabla^*_{Y+Z} X = \nabla^*_Y X + \nabla^*_Z X$.
(2) $\nabla^*_{fY} X = f\nabla^*_Y X$.
(3) $\nabla^*_Z (X + Y) = \nabla^*_Z X + \nabla^*_Z Y$.
(4) $\nabla^*_Y (fX) = (Yf)X + f\nabla^*_Y X$.

(2) のみ示す.
∇^* の定義と ∇ がアファイン接続であることを用いると,

$$\begin{aligned}
g(Z, \nabla^*_{fY} X) &= (fY)g(Z, X) - g(\nabla_{fY} Z, X) \\
&= (fY)g(Z, X) - g(f\nabla_Y Z, X) \\
&= f(Yg(Z, X) - g(\nabla_Y Z, X)) \\
&= fg(Z, \nabla^*_Y X) \\
&= g(Z, f\nabla^*_Y X).
\end{aligned}$$

g は非退化で, Z は任意だから,

$$\nabla^*_{fY}X = f\nabla^*_Y X.$$

□

上の ∇^* を ∇ の双対接続という. また, ∇ と ∇^* は g に関して互いに双対的であるという.
定義より, ∇^* の双対接続は ∇ に一致する. すなわち,

$$(\nabla^*)^* = \nabla$$

である.
また, ∇ が g に関して計量的ならば,

$$\nabla^* = \nabla$$

である.
T, T^* をそれぞれ ∇, ∇^* の捩率とし, T と T^* の関係を調べてみよう. まず, g は $(0,2)$ 型のテンソル場であるから, $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して g の X に関する共変微分 $\nabla_X g$ を

$$Xg(Y,Z) = (\nabla_X g)(Y,Z) + g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z) \quad (Y, Z \in \mathfrak{X}(M))$$

により定めることができることに注意しよう.

定理　任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(\nabla_X g)(Y,Z) + g(Y, T(X,Z)) = (\nabla_Z g)(Y,X) + g(Y, T^*(X,Z)).$$

証明　まず,

$$\begin{aligned}(\nabla_X g)(Y,Z) + g(Y, T(X,Z)) &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_X Z) \\ &\quad + g(Y, \nabla_X Z - \nabla_Z X - [X,Z]) \\ &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_Z X) - g(Y, [X,Z]).\end{aligned}$$

一方, 双対接続の定義より,

$$\begin{aligned}(\nabla_Z g)(Y,X) + g(Y, T^*(X,Z)) &= Zg(Y,X) - g(\nabla_Z Y, X) - g(Y, \nabla_Z X) \\ &\quad + g(Y, \nabla^*_X Z - \nabla^*_Z X - [X,Z]) \\ &= Zg(Y,X) - g(\nabla_Z Y, X) - g(Y, \nabla_Z X) \\ &\quad + Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - Zg(Y,X) + g(\nabla_Z Y, X) \\ &\quad - g(Y, [X,Z]) \\ &= Xg(Y,Z) - g(\nabla_X Y, Z) - g(Y, \nabla_Z X) - g(Y, [X,Z]).\end{aligned}$$

よって, 等式がなりたつ. □

上の定理より, 直ちに次がなりたつ.

定理　$T = 0$ とする. $T^* = 0$ であることと任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$(\nabla_X g)(Y,Z) = (\nabla_Z g)(Y,X) \tag{$*$}$$

がなりたつこととは同値である.

上の $(*)$ を Codazzi の方程式という.

任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, 等式

$$(\nabla_X g)(Y, Z) = (\nabla_X g)(Z, Y)$$

は常になりたつから, $(*)$ がなりたつことは ∇g が $(0,3)$ 型の対称テンソル場となることに他ならない.
そこで, 統計多様体を次のように定める.

定義　M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続, g を M の非退化計量とする. ∇ が捩れをもたず, g に関して Codazzi の方程式 $(*)$ をみたすとき, 組 (M, ∇, g) を統計多様体という.

注意　上の定理より, 統計多様体は ∇ および g に関する双対接続 ∇^* がともに捩れをもたないものとして定めてもよい.

統計的モデルは Fisher 計量と α 接続を考えることにより, 統計多様体となる.

例 (統計的モデル)
Ω を高々可算集合または $\mathbf{R}^k$ とし, Ω 上の n 次元統計的モデル

$$S = \{p(x;\xi) | \xi \in \Xi\}$$

を $\xi = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ を局所座標系とする n 次元多様体とみなそう.
まず, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ とすると, Fisher 計量は

$$g_{ij}(\xi) = E_\xi[\partial_i l_\xi \partial_j l_\xi]$$

によりあたえられ,

$$\partial_k g_{ij} = E_\xi[(\partial_k \partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)] + E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_k \partial_j l_\xi)] + E_\xi[(\partial_i l_\xi)(\partial_j l_\xi)(\partial_k l_\xi)]$$

がなりたつのであった.
また, S の α 接続 $\nabla^{(\alpha)}$ に対する Christoffel の記号 $\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k}$ は

$$\Gamma^{(\alpha)}_{ij,k} = E_\xi\left[\left(\partial_i \partial_j l_\xi + \frac{1-\alpha}{2} \partial_i l_\xi \partial_j l_\xi\right)(\partial_k l_\xi)\right]$$

により定まるのであった. §9 において扱ったことを思い出そう.
ここで,

$$\begin{aligned} g\left(\nabla^{(\alpha)}_{\partial_k} \partial_i, \partial_j\right) + g\left(\partial_i, \nabla^{(-\alpha)}_{\partial_k} \partial_j\right) &= \Gamma^{(\alpha)}_{ki,j} + \Gamma^{(-\alpha)}_{kj,i} \\ &= E_\xi\left[\left(\partial_k \partial_i l_\xi + \frac{1-\alpha}{2} \partial_k l_\xi \partial_i l_\xi\right)(\partial_j l_\xi)\right] \\ &\quad + E_\xi\left[\left(\partial_k \partial_j l_\xi + \frac{1+\alpha}{2} \partial_k l_\xi \partial_j l_\xi\right)(\partial_i l_\xi)\right] \\ &= \partial_k g_{ij}. \end{aligned}$$

よって, $\nabla^{(-\alpha)}$ は $\nabla^{(\alpha)}$ の双対接続である.
更に, $\nabla^{(\alpha)}, \nabla^{(-\alpha)}$ はともに捩れをもたないから, $(S, \nabla^{(\alpha)}, g)$ は統計多様体である.

関連事項 11. 不定値直交群

n 次の直交行列全体の集合を $\mathrm{O}(n)$ と表す．すなわち, 実数を成分とする n 次の正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$, n 次の単位行列を E_n と表すと,

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) | {}^t AA = E_n\}$$

である．$\mathrm{O}(n)$ は行列の積に関して群となり, n 次の直交群ともいう．
直交群は Euclid 空間の標準内積を保つ線形変換全体の集合として特徴付けることもできる．すなわち, $\langle\ ,\ \rangle$ を $\mathbf{R}^n$ の標準内積とすると,

$$\mathrm{O}(n) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) | \text{ 任意の } x, y \in \mathbf{R}^n \text{ に対して } \langle xA, yA\rangle = \langle x, y\rangle\}$$

と表すことができる．
$\mathbf{R}^n$ の標準内積は特に正定値な双線形写像

$$\langle\ ,\ \rangle : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

である．この双線形写像を不定値なものに置き替えることにより, 不定値直交群というものを考えることができる．
p, q を $p + q = n$ をみたす自然数とし, $x = (x_1, \ldots, x_n), y = (y_1, \ldots, y_n) \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\langle x, y\rangle_{p,q} = -x_1y_1 - \cdots - x_py_p + x_{p+1}y_{p+1} + \cdots + x_ny_n$$

とおく．このとき, $\langle\ ,\ \rangle_{p,q}$ は非退化な双線形写像

$$\langle\ ,\ \rangle_{p,q} : \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

を定める．$\langle\ ,\ \rangle_{p,q}$ を符号数 (p, q) の内積という．特に, 符号数 $(1, n-1)$ の内積を Lorentz 内積ともいう．Lorentz 内積のあたえられた $\mathbf{R}^n$ を Lorentz 空間という．特に, $n = 4$ のときは Minkowski 空間ともいう．
符号数 (p, q) の内積を保つ線形変換全体の集合を $\mathrm{O}(p, q)$ と表す．すなわち,

$$\mathrm{O}(p, q) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) | \text{ 任意の } x, y \in \mathbf{R}^n \text{ に対して } \langle xA, yA\rangle_{p,q} = \langle x, y\rangle_{p,q}\}$$

である．$\mathrm{O}(p, q)$ は行列の積に関して群となる．これが不定値直交群である．また, $\mathrm{O}(1, n-1)$ は Lorentz 群ともいう．
また, 零行列を O と表し,

$$E_{p,q} = \begin{pmatrix} -E_p & O \\ O & E_q \end{pmatrix}$$

とおくと,

$$\mathrm{O}(p, q) = \{A \in M_n(\mathbf{R}) | {}^t AE_{p,q}A = E_{p,q}\}$$

と表すこともできる．
直交群の場合と同様に, 不定値直交群も群としての構造のみならず, 多様体としての構造ももち, Lie 群というものの例をあたえる．ただし, 直交群が 2 つの連結成分をもつのに対して, 不定値直交群は 4 つの連結成分をもつ．