§13. 双対平坦空間

§11 において扱ったように, 非退化計量に関して互いに双対的なアファイン接続の捩率については, 一方が捩れをもたないからといって, その双対も同様であるとは限らなかった. では, 曲率についてはどうであろうか.
次の定理は §2 において扱った, 計量的なアファイン接続の曲率に関する性質の一般化である. 証明も同様に行うことができる.

定理　M を C^∞ 級多様体, g を M の非退化計量, ∇, ∇^* を g に関して双対的な M のアファイン接続, R, R^* をそれぞれ ∇, ∇^* の曲率とする. このとき, 任意の $X, Y, Z, W \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$g(R(X,Y)Z,W) + g(Z, R^*(X,Y)W) = 0.$$

(M, ∇, g) を統計多様体, ∇^* を ∇ の双対接続とする. 上の定理より, ∇ が平坦であることと ∇^* が平坦であることとは同値である. ∇, ∇^* がともに平坦なとき, 組 (M, g, ∇, ∇^*) を双対平坦空間という.

例　S を指数型分布族とし, Fisher 計量 g および α 接続 $\nabla^{(\alpha)}$ を考える.
まず, S は統計的モデルであるから, §11 において扱ったように, $(S, \nabla^{(\alpha)}, g)$ は統計多様体で, $\nabla^{(\alpha)}$ の双対接続は $\nabla^{(-\alpha)}$ である.
また, S は指数型分布族であるから, §10 において扱ったように, $\nabla^{(1)}$ は平坦である.
よって, $\nabla^{(-1)}$ も平坦である.
したがって, $(S, g, \nabla^{(1)}, \nabla^{(-1)})$ は双対平坦空間である.
同様に, S を混合型分布族とすると, $(S, g, \nabla^{(-1)}, \nabla^{(1)})$ は双対平坦空間である.

(M, g, ∇, ∇^*) を双対平坦空間とする. 以下では, M の十分小さい近傍 U の上で考えよう.
まず, ∇ は平坦であるから, ∇ に関する U 上のアファイン座標系 θ が存在する. このとき,

$$\theta = (\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^n),\ \partial_i = \frac{\partial}{\partial \theta^i}\ (i = 1, 2, \ldots, n)$$

と表すことにする. 添字の位置に注意しよう.
次に, ∇^* も平坦であるから, ∇^* に関する U 上のアファイン座標系 η が存在する. このときは上の場合と添字の位置を入れ替えて,

$$\eta = (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n),\ \partial^j = \frac{\partial}{\partial \eta_j}\ (j = 1, 2, \ldots, n)$$

と表すことにする.
ここで, $X \in \mathfrak{X}(U)$ とすると, θ, η はそれぞれ ∇, ∇^* に関するアファイン座標系だから,

$$\begin{aligned} Xg(\partial_i, \partial^j) &= g(\nabla_X \partial_i, \partial^j) + g(\partial_i, \nabla^*_X \partial^j) \\ &= g(0, \partial^j) + g(\partial_i, 0) \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって, $g(\partial_i, \partial^j)$ は定数関数である.
したがって, 必要ならば η を別のアファイン座標系に変換することにより,

$$g(\partial_i, \partial^j) = \delta_i^j$$

とすることができる. ただし, δ_i^j は Kronecker の δ である.

このとき, 一方のアファイン座標系を他方のアファイン座標系の双対座標系という. また, θ と η は g に関して互いに双対的であるという.
ここで,

$$g_{ij} = g(\partial_i, \partial_j),\ g^{ij} = g(\partial^i, \partial^j)$$

とおく.
まず, 行列値関数 (g_{ij}) と (g^{ij}) は互いに逆行列となる. 実際,

$$\partial^j = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \theta^i}{\partial \eta_j} \partial_i,\ \partial_i = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^i} \partial^j$$

だから, θ と η が g に関して互いに双対的であることより,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= g\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \eta_k}{\partial \theta^i} \partial^k, \partial_j \right) \\ &= \frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^i}, \\ g^{ij} &= g\left(\sum_{k=1}^n \frac{\partial \theta^k}{\partial \eta_i} \partial_k, \partial^j \right) \\ &= \frac{\partial \theta^j}{\partial \eta_i} \end{aligned}$$

となり,

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^n g_{ij} g^{jk} &= \sum_{j=1}^k \frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^i} \frac{\partial \theta^k}{\partial \eta_j} \\ &= \frac{\partial \theta^k}{\partial \theta^i} \\ &= \delta_i^k \end{aligned}$$

である.
また, g は対称テンソル場であるから,

$$g_{ij} = g_{ji},\ g^{ij} = g^{ji},$$

すなわち

$$\frac{\partial \eta_j}{\partial \theta^i} = \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta^j},\ \frac{\partial \theta^j}{\partial \eta_i} = \frac{\partial \theta^i}{\partial \eta_j}$$

がなりたつ.
よって, U 上の 1 次微分形式

$$\sum_{i=1}^n \eta_i d\theta^i$$

を外微分すると,

$$\begin{aligned} d \sum_{i=1}^n \eta_i d\theta^i &= \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta^j} d\theta^j \wedge d\theta^i \\ &= 0 \end{aligned}$$

となる．そこで, 次の Poincaré の補題を用いることにしよう．

Poincaré の補題　M を n 次元 C^∞ 級多様体とし, $p \in \{1, 2, \dots, n\}$ に対して ω を M 上の p 次微分形式とする．$d\omega = 0$ ならば, M の十分小さい近傍において, $d\psi = \omega$ となる $(p-1)$ 次微分形式が存在する．

Poincaré の補題より,

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n} \eta_i d\theta^i$$

となる U 上の 0 次微分形式 ψ が存在する．すなわち, $\psi \in C^\infty(U)$ で,

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i} d\theta^i = \sum_{i=1}^{n} \eta_i d\theta^i$$

である．
よって,

$$\eta_i = \frac{\partial \psi}{\partial \theta^i}$$

だから,

$$\begin{aligned} g_{ij} &= \frac{\partial \eta_i}{\partial \theta^j} \\ &= \frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta^i \partial \theta^j} \end{aligned}$$

を得る．
同様に,

$$d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \theta^i d\eta_i$$

となる $\varphi \in C^\infty(U)$ も存在するが, 定数の差を無視すれば, φ は

$$\varphi = \sum_{i=1}^{n} \theta^i \eta_i - \psi$$

と表すことができる．実際, 両辺を外微分すればよい．
また,

$$g^{ij} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \eta_i \partial \eta_j}$$

がなりたつ．
特に, g が正定値, すなわち Riemann 計量の場合は ψ, φ はともに凸関数となる．
そこで, 次のように定める．

定義　関数 ψ, φ を用いて,

$$d\psi = \sum_{i=1}^{n} \eta_i d\theta^i, \ d\varphi = \sum_{i=1}^{n} \theta^i d\eta_i, \ \psi + \varphi = \sum_{i=1}^{n} \theta^i \eta_i$$

と表される, θ と η の間の座標変換を Legendre 変換という．このとき, ψ, φ をポテンシャルという．

関連事項 13. 定曲率空間

Riemann 多様体に対して Levi-Civita 接続を考え, 断面曲率というものを定義することができる.
(M,g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を (M,g) の Levi-Civita 接続, R を ∇ の曲率とする. ただし, M は 2 次元以上であるとする.
$p \in M$ に対して σ を T_pM の 2 次元部分空間とし, σ の基底 $\{u,v\}$ を任意に選んでおく.
このとき,

$$K(\sigma) = \frac{g(R(u,v)v,u)}{g(u,u)g(v,v) - g(u,v)^2}$$

とおくと, $K(\sigma)$ は $\{u,v\}$ の選び方に依存しないことが分かる. $K(\sigma)$ を σ に対する断面曲率という. K が p および σ に依存しない定数となるとき, M を定曲率空間という.
定曲率空間の例を挙げよう.
まず, $\mathbf{R}^n$ を標準内積を用いることにより, Riemann 多様体とみなそう. このとき, $\mathbf{R}^n$ は断面曲率が 0 の定曲率空間となる.
次に, $a > 0$ に対して, $S^n(a)$ を原点中心, 半径 a の n 次元球面とする. すなわち,

$$S^n(a) = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} | \|x\| = a\}$$

である. このとき, $S^n(a)$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体となる.
ここで, $\mathbf{R}^{n+1}$ を標準内積を用いることにより, Riemann 多様体とみなすと, $S^n(a)$ は誘導計量を考えることにより, Riemann 多様体となる. このとき, $S^n(a)$ の断面曲率は $\dfrac{1}{a^2}$ となることが分かる.
更に, $a < 0$ に対して, $\mathbf{R}^n$ の開集合 $H^n(a)$ を

$$H^n(a) = \{x \in \mathbf{R}^n | \|x\| < a\}$$

により定める. このとき, $H^n(a)$ は $\mathbf{R}^n$ の開部分多様体となる.
ここで, $H^n(a)$ の Riemann 計量 g を

$$g = \frac{4a^2}{(a^2 - \|x\|^2)^2} \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

により定める. このとき, $H^n(a)$ の断面曲率は $-\dfrac{1}{a^2}$ となることが分かる.
実は, 同じ断面曲率をもち, 連結かつ単連結で完備な定曲率空間は互いに等長的であることが知られている. よって, そのような Riemann 多様体は Riemann 多様体としては, 上に挙げた 3 つの例の何れかであると思ってよい.
例えば, $a \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対して, $\mathbf{R}^{n+1}$ の部分多様体 M を

$$M = \{(x_1, x_2, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} | x_1^2 + \cdots + x_n^2 + a x_{n+1}^2 = a\}$$

により定め, $\mathbf{R}^{n+1}$ の非退化計量 g を

$$g = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2 + a dx_{n+1}^2$$

により定めよう.
誘導計量を考えると, $a > 0$ のときは M は $S^n(a)$ と等長的で, $a < 0$ のときは M は 2 つの連結成分をもち, 何れも $H^n(a)$ と等長的であることが分かる.