§2. 集合の演算

集合に対していろいろな演算を考えることができる.
A, B を集合とする. このとき, 集合 $A \cup B, A \cap B, A \setminus B$ を

$$A \cup B = \{x | x \in A \text{ または } x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \in B\},$$
$$A \setminus B = \{x | x \in A \text{ かつ } x \notin B\}$$

により定め, それぞれ A と B の和集合, 共通部分, 差集合という. $A \setminus B$ は $A - B$ とも表す.
$A \cap B \neq \emptyset$ のとき, A と B は交わるという. A と B が交わらないとき, $A \cup B$ を A と B の直和という.

例　集合 A, B を

$$A = \{1, 2\},\ B = \{2, 3\}$$

により定めると,

$$A \cup B = \{1, 2, 3\},\ A \cap B = \{2\},\ A \setminus B = \{1\},\ B \setminus A = \{3\}.$$

特に, A と B は交わる.

次は明らかであろう.

命題　A を集合とすると, 次の (1)〜(7) がなりたつ.
(1) $A \cup A = A$.
(2) $A \cup \emptyset = A$.
(3) $A \cap A = A$.
(4) $A \cap \emptyset = \emptyset$.
(5) $A \setminus A = \emptyset$.
(6) $A \setminus \emptyset = A$.
(7) $\emptyset \setminus A = \emptyset$.

和集合や共通部分に関しては次も明らかであろう.

命題　A, B を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $A \subset A \cup B$, $B \subset A \cup B$.
(2) $A \cap B \subset A$, $A \cap B \subset B$.

また, 和集合や共通部分は次のように特徴付けることができる.

命題　A, B, C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $A \subset C$ かつ $B \subset C$ ならば, $A \cup B \subset C$.
　特に, $A \cup B$ は A と B を含む集合の中で包含関係に関して最小のもの.
(2) $C \subset A$ かつ $C \subset B$ ならば, $C \subset A \cap B$.
　特に, $A \cap B$ は A と B に含まれる集合の中で包含関係に関して最大のもの.

和集合や共通部分を取るという演算は交換律, 結合律, 分配律をみたす. 順に述べていこう.

交換律　A, B を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $A \cup B = B \cup A$.
(2) $A \cap B = B \cap A$.

結合律 A, B, C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$.
(2) $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$.

注意 和集合に関する結合律より, $(A \cup B) \cup C$ および $A \cup (B \cup C)$ はともに

$$A \cup B \cup C$$

と表しても構わない.
更に, 和集合に関する交換律より,

$$A \cup B \cup C = A \cup C \cup B = B \cup A \cup C = B \cup C \cup A = C \cup A \cup B = C \cup B \cup A.$$

共通部分についても同様である.

分配律 A, B, C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$.
(2) $(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C)$.

証明 (1): まず,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C)$$

を示す.
$x \in (A \cup B) \cap C$ とすると, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$.
すなわち, $x \in A$ または $x \in B$, かつ $x \in C$ だから, $x \in A \cap C$ または $x \in B \cap C$.
よって,

$$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

したがって,

$$(A \cup B) \cap C \subset (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

次に,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C$$

を示す.
$x \in (A \cap C) \cup (B \cap C)$ とすると, $x \in A \cap C$ または $x \in B \cap C$.
$x \in A \cap C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in C$ だから, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$.
よって,

$$x \in (A \cup B) \cap C.$$

$x \in B \cap C$ のとき, $x \in B$ かつ $x \in C$ だから, $x \in A \cup B$ かつ $x \in C$.
よって,

$$x \in (A \cup B) \cap C.$$

したがって,

$$(A \cap C) \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap C.$$

以上より,

$$(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C).$$

(2): まず,

$$(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C)$$

を示す.
$x \in (A \cap B) \cup C$ とすると, $x \in A \cap B$ または $x \in C$.
$x \in A \cap B$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ だから, $x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$.
よって,

$$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

$x \in C$ のとき, $x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$.
よって,

$$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

したがって,

$$(A \cap B) \cup C \subset (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

次に,

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C$$

を示す.
$x \in (A \cup C) \cap (B \cup C)$ とすると, $x \in A \cup C$ かつ $x \in B \cup C$.
$x \notin C$ のとき, $x \in A$ かつ $x \in B$ だから, $x \in A \cap B$.
よって,

$$x \in (A \cap B) \cup C.$$

したがって,

$$(A \cup C) \cap (B \cup C) \subset (A \cap B) \cup C.$$

以上より,

$$(A \cap B) \cup C = (A \cup C) \cap (B \cup C).$$

□

上の程度の事実であれば, Venn 図という図を描いて確認することができるが, Venn 図に頼ることのできない一般的な状況でも困らないよう, 定義に従って証明できることが重要である.
最後に, 差集合に関する基本的性質についても述べておこう.

命題　A, B, C を集合とする. $A \subset B$ ならば, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $A \setminus C \subset B \setminus C$.
(2) $C \setminus B \subset C \setminus A$.

証明　(1): $x \in A \setminus C$ とすると, $x \in A$ かつ $x \notin C$.
$A \subset B$ だから, $x \in B$.
よって, $x \in B \setminus C$.
したがって,

$$A \setminus C \subset B \setminus C.$$

(2): $x \in C \setminus B$ とすると, $x \in C$ かつ $x \notin B$.
$A \subset B$ だから, $x \notin A$.
よって, $x \in C \setminus A$.
したがって,

$$C \setminus B \subset C \setminus A.$$

□

問題 2

1. A を正の偶数全体の集合, B を正の奇数全体の集合, C を素数全体の集合とする. 次の (1)〜(6) の集合を求めよ.
(1) $A \cup B$.
(2) $A \cap B$.
(3) $A \cap C$.
(4) $A \setminus B$.
(5) $B \setminus A$.
(6) $C \setminus B$.

2. $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ を用いて, 次の (1)〜(3) の集合を表せ.
(1) 実数でない複素数全体の集合.
(2) 無理数全体の集合.
(3) 0 および負の整数全体の集合.

3. 集合 A, B に対して

$$A \ominus B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

とおく. $A \ominus B$ を A と B の対称差という. 次の (1)〜(3) がなりたつことを示せ.
(1) $A \ominus A = \emptyset$.
(2) $A \ominus \emptyset = A$.
(3) $A \ominus B = B \ominus A$. すなわち, 対称差は交換律をみたす.

4. 集合 A, B を

$$A = \{a^x | a > 0,\ a \neq 1\},\ B = \{f(x) | f(x) \text{ は } \mathbf{R} \text{ で微分可能な関数で, } f'(0) = 1\}$$

により定める. $A \cap B$ を求めよ.

5. 実数を成分とする n 次の正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表すことにする. $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 S, A を

$$S = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X \text{ は対称行列, すなわち } {}^tX = X\},$$
$$A = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X \text{ は交代行列, すなわち } {}^tX = -X\}$$

により定める.
(1) $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると,

$$\frac{1}{2}(X + {}^tX) \in S,\ \frac{1}{2}(X - {}^tX) \in A$$

であることを示せ.
(2) $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 $S + A$ を

$$S + A = \{X + Y | X \in S,\ Y \in A\}$$

により定める. $S + A = M_n(\mathbf{R})$ であることを示せ.
(3) $S \cap A$ を求めよ.

問題 2 の解答

1. (1) $A \cup B = \mathbf{N}$.
(2) $A \cap B = \emptyset$.
(3) $A \cap C = \{2\}$.
(4) $A \setminus B = A$.
(5) $B \setminus A = B$.
(6) $C \setminus B = \{2\}$.

2. (1) $\mathbf{C} \setminus \mathbf{R}$.
(2) 無理数は有理数でない実数だから, $\mathbf{R} \setminus \mathbf{Q}$.
(3) 0 および負の整数は自然数でない整数だから, $\mathbf{Z} \setminus \mathbf{N}$.

3. (1) 対称差の定義より,

$$\begin{aligned} A \ominus A &= (A \setminus A) \cup (A \setminus A) \\ &= \emptyset \cup \emptyset \\ &= \emptyset. \end{aligned}$$

(2) 対称差の定義より,

$$\begin{aligned} A \ominus \emptyset &= (A \setminus \emptyset) \cup (\emptyset \setminus A) \\ &= A \cup \emptyset \\ &= A. \end{aligned}$$

(3) 対称差の定義と和集合の交換律より,

$$\begin{aligned} A \ominus B &= (A \setminus B) \cup (B \setminus A) \\ &= (B \setminus A) \cup (A \setminus B) \\ &= B \ominus A. \end{aligned}$$

4. $f(x) = a^x \in A$ とすると,

$$f'(x) = (\log a) a^x$$

だから,

$$f'(0) = \log a$$

よって, $f'(0) = 1$ となるのは $a = e$ のとき.
したがって,

$$A \cap B = \{e^x\}.$$

5. (1) まず,

$$\begin{aligned} {}^t\left\{\frac{1}{2}(X + {}^tX)\right\} &= \frac{1}{2}{}^t(X + {}^tX) \\ &= \frac{1}{2}({}^tX + {}^{tt}X) \\ &= \frac{1}{2}({}^tX + X) \\ &= \frac{1}{2}(X + {}^tX). \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{1}{2}(X + {}^tX) \in S.$$

次に,

$$\begin{aligned} {}^t\left\{\frac{1}{2}(X - {}^tX)\right\} &= \frac{1}{2}{}^t(X - {}^tX) \\ &= \frac{1}{2}({}^tX - {}^{tt}X) \\ &= \frac{1}{2}({}^tX - X) \\ &= -\frac{1}{2}(X - {}^tX). \end{aligned}$$

よって,

$$\frac{1}{2}(X - {}^tX) \in A.$$

(2) まず, $S + A$ の定義より,

$$S + A \subset M_n(\mathbf{R}).$$

次に, $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると, (1) より,

$$X = \frac{1}{2}(X + {}^tX) + \frac{1}{2}(X - {}^tX) \in S + A.$$

よって,

$$M_n(\mathbf{R}) \subset S + A.$$

したがって,

$$S + A = M_n(\mathbf{R}).$$

(3) $X \in S \cap A$ とすると, $X \in S$ かつ $X \in A$ だから,

$$\begin{aligned} X &= {}^tX \\ &= -X. \end{aligned}$$

よって,

$$X = O.$$

したがって,

$$S \cap A = \{O\}.$$