§4. 写像

集合と同様に現代数学において必要不可欠な概念である写像について述べよう.
A, B を集合とし, A の任意の元に対して B の元を対応させる規則 f があたえられているとする. このことを

$$f : A \to B$$

と表し, f を A から B への写像, A を f の定義域, B を f の値域という. 値域が $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ の場合は f を関数ということが多い.
また, 写像 f によって $a \in A$ に $b \in B$ が対応するとき, $b = f(a)$ と表す. このとき, b を f による a の像, a を f による b の原像または逆像という.

例 1 変数の微分積分では区間で定義された関数を考えることが多い. 区間 I で定義された実数値関数 f は

$$f : I \to \mathbf{R}$$

と表すことができる.

線形代数では 1 つのベクトル空間からもう 1 つのベクトル空間への写像の中でも, 特に線形写像というものを考えることが多い. 線形写像は次のように定義される.

定義 U, V をベクトル空間, f を U から V への写像とする. f は次の (1), (2) をみたすとき, 線形写像という.

(1) 任意の $u, v \in U$ に対して $f(u+v) = f(u) + f(v)$.
(2) 任意の $c \in \mathbf{R}$ および任意の $u \in U$ に対して $f(cu) = cf(u)$.

$f, \tilde{f}$ をともに A から B への写像とし, 任意の $a \in A$ に対して $f(a) = \tilde{f}(a)$ がなりたつとき, $f = \tilde{f}$ と表し, f と $\tilde{f}$ は等しいという. $f = \tilde{f}$ でないときは $f \neq \tilde{f}$ と表す.
写像に対してグラフというものを対応させることができる. 例えば, 1 変数関数のグラフであれば, 高等学校においてもある程度親しんでいることであろうが, 一般の写像に対してもグラフを定義するために 2 つの集合の直積について述べよう.
2 つの集合 A, B に対して A の元 a と B の元 b の組 (a, b) 全体からなる集合を $A \times B$ と表し, A と B の直積という. ただし, 上の組は順序も込みで考えたもので, $(a, b), (a', b') \in A \times B$ に対して $(a, b) = (a', b')$ となるのは $a = a'$ かつ $b = b'$ のときであるとする.

例 集合 A, B を

$$A = \{1, 2\},\ B = \{3, 4, 5\}$$

により定めると,

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\},$$

$$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\},$$

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\},$$

$$B \times B = \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)\}.$$

例えば, $A \times A$ の 2 つの元 $(1, 2)$ と $(2, 1)$ は異なるものとみなすことに注意しよう.

A から B への写像 f に対して $A \times B$ の部分集合 $G(f)$ を

$$G(f) = \{(a, f(a)) | a \in A\}$$

により定め, $G(f)$ を f のグラフという.

例 $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}$ の直積 $\mathbf{R}\times\mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^2$ と表し, 平面とみなすことが多い.
区間 I で定義された実数値関数 f のグラフは

$$G(f)=\{(x,f(x))|x\in I\}$$

で, f が連続な場合は $G(f)$ は平面上の曲線とみなすことができる.

f を A から B への写像とする. A の部分集合 A_1 に対して B の部分集合 $f(A_1)$ を

$$f(A_1)=\{f(a)|a\in A_1\}$$

により定め, $f(A_1)$ を f による A_1 の像という.
また, B の部分集合 B_1 に対して A の部分集合 $f^{-1}(B_1)$ を

$$f^{-1}(B_1)=\{a\in A|f(a)\in B_1\}$$

により定め, $f^{-1}(B_1)$ を f による B_1 の原像または逆像という.
像および逆像に関して次がなりたつ.

定理 f を A から B への写像, A_1,A_2 を A の部分集合, B_1,B_2 を B の部分集合とすると, 次の (1)〜(10) がなりたつ.
(1) $A_1\subset A_2$ ならば, $f(A_1)\subset f(A_2)$.
(2) $f(A_1\cup A_2)=f(A_1)\cup f(A_2)$.
(3) $f(A_1\cap A_2)\subset f(A_1)\cap f(A_2)$.
(4) $f(A_1\setminus A_2)\supset f(A_1)\setminus f(A_2)$.
(5) $B_1\subset B_2$ ならば, $f^{-1}(B_1)\subset f^{-1}(B_2)$.
(6) $f^{-1}(B_1\cup B_2)=f^{-1}(B_1)\cup f^{-1}(B_2)$.
(7) $f^{-1}(B_1\cap B_2)=f^{-1}(B_1)\cap f^{-1}(B_2)$.
(8) $f^{-1}(B_1\setminus B_2)=f^{-1}(B_1)\setminus f^{-1}(B_2)$.
(9) $f^{-1}(f(A_1))\supset A_1$.
(10) $f(f^{-1}(B_1))\subset B_1$.

証明 (1), (5) は明らかである. 残りの (10) 以外を示す.
(2): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
f(A_1\cup A_2)&=\{b\in B|b=f(a)\text{ となる }a\in A_1\cup A_2\text{ が存在する }\}\\
&=\left\{b\in B\,\middle|\,\begin{array}{l}b=f(a_1)\text{ となる }a_1\in A_1\text{ または }b=f(a_2)\\ \text{となる }a_2\in A_2\text{ が存在する}\end{array}\right\}\\
&=\{b\in B|b\in f(A_1)\text{ または }b\in f(A_2)\}\\
&=f(A_1)\cup f(A_2).
\end{aligned}$$

(3): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned}
f(A_1\cap A_2)&=\{b\in B|b=f(a)\text{ となる }a\in A_1\cap A_2\text{ が存在する }\}\\
&\subset\left\{b\in B\,\middle|\,\begin{array}{l}b=f(a_1)\text{ となる }a_1\in A_1\text{ および }b=f(a_2)\\ \text{となる }a_2\in A_2\text{ が存在する}\end{array}\right\}\\
&=\{b\in B|b\in f(A_1)\text{ かつ }b\in f(A_2)\}\\
&=f(A_1)\cap f(A_2).
\end{aligned}$$

(4): 右辺を変形すると,

$$\begin{aligned} f(A_1) \setminus f(A_2) &= \{b \in B | b \in f(A_1) \text{ かつ } b \notin f(A_2)\} \\ &= \left\{ b \in B \,\middle|\, \begin{array}{l} b = f(a) \text{ となる } a \in A_1 \text{ が存在し,} \\ \text{かつ } b \notin f(A_2) \end{array} \right\} \\ &\subset \{b \in B | b = f(a) \text{ となる } a \in A_1 \setminus A_2 \text{ が存在する }\} \\ &= f(A_1 \setminus A_2). \end{aligned}$$

(6): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cup B_2) &= \{a \in A | f(a) \in B_1 \cup B_2\} \\ &= \{a \in A | f(a) \in B_1 \text{ または } f(a) \in B_2\} \\ &= \{a \in A | a \in f^{-1}(B_1) \text{ または } a \in f^{-1}(B_2)\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cup f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

(7): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \cap B_2) &= \{a \in A | f(a) \in B_1 \cap B_2\} \\ &= \{a \in A | f(a) \in B_1 \text{ かつ } f(a) \in B_2\} \\ &= f^{-1}(B_1) \cap f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

(8): 左辺を変形すると,

$$\begin{aligned} f^{-1}(B_1 \setminus B_2) &= \{a \in A | f(a) \in B_1 \setminus B_2\} \\ &= \{a \in A | f(a) \in B_1 \text{ かつ } f(a) \notin B_2\} \\ &= \{a \in A | a \in f^{-1}(B_1) \text{ かつ } a \notin f^{-1}(B_2)\} \\ &= f^{-1}(B_1) \setminus f^{-1}(B_2). \end{aligned}$$

(9): $a \in A_1$ とすると, $f(a) \in f(A_1)$.
よって, $a \in f^{-1}(f(A_1))$.
したがって,

$$A_1 \subset f^{-1}(f(A_1)).$$

□

注意 (3), (4), (9), (10) において, 等号は一般にはなりたたない. 例えば,

$$A = \{1, 2\},\ B = \{3, 4\}$$

とし, A から B への写像 f を

$$f(1) = f(2) = 3$$

により定めると,

$$f(\{1\} \cap \{2\}) = \emptyset,\ f(\{1\}) \cap f(\{2\}) = \{3\},$$

$$f(\{1\} \setminus \{2\}) = \{3\},\ f(\{1\}) \setminus f(\{2\}) = \emptyset,$$

$$f^{-1}(f(\{1\})) = \{1, 2\},$$

$$f(f^{-1}(\{3, 4\})) = \{3\}.$$

問題 4

1. f, g を閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数とする．f, g が

$$f(a) \leq g(a),\ \ f(b) \geq g(b)$$

をみたすならば, $G(f)$ と $G(g)$ は交わることを示せ.

2. ベクトル空間の定義における特別な元 0 を零ベクトルという．U, V をベクトル空間とし, U, V の零ベクトルをそれぞれ $0_U, 0_V$ と表すことにする．f を U から V への線形写像とすると, $(0_U, 0_V) \in G(f)$ であることを示せ.

3. 区間 I および I で定義された関数 f を次の (1)〜(6) のように定める．$f(I)$ および $f^{-1}(\{0\})$ を求めよ.

(1) $I = \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ $(x \in I)$. ただし, $n \in \mathbf{N}$.

(2) $I = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ $(x \in I)$.

(3) $I = [0, \pi]$, $f(x) = \cos x$ $(x \in I)$.

(4) $I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \tan x$ $(x \in I)$.

(5) $I = \mathbf{R}$, $f(x) = e^x$ $(x \in I)$.

(6) $I = (0, +\infty)$, $f(x) = \log x$ $(x \in I)$.

4. U, V をベクトル空間, f を U から V への線形写像とする．このとき, $f(U)$, $f^{-1}(\{0\})$ をそれぞれ $\mathrm{Im}\, f$, $\mathrm{Ker}\, f$ と表すことが多い．また, $f^{-1}(\{0\})$ を f の核ともいう．次の (1)〜(4) がなりたつことを示せ.

(1) $v_1, v_2 \in \mathrm{Im}\, f$ ならば, $v_1 + v_2 \in \mathrm{Im}\, f$.

(2) $v \in \mathrm{Im}\, f$, $c \in \mathbf{R}$ ならば, $cv \in \mathrm{Im}\, f$.

(3) $u_1, u_2 \in \mathrm{Ker}\, f$ ならば, $u_1 + u_2 \in \mathrm{Ker}\, f$.

(4) $u \in \mathrm{Ker}\, f$, $c \in \mathbf{R}$ ならば, $cu \in \mathrm{Ker}\, f$.

問題 4 の解答

1. 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad (x \in [a,b])$$

により定めると, 仮定より, $h(x)$ は $[a,b]$ で連続で,

$$h(a) \leq 0, \ h(b) \geq 0.$$

$h(a) = 0$ のとき,

$$(a, f(a)) = (a, g(a)) \in G(f) \cap G(g).$$

$h(b) = 0$ のとき,

$$(b, f(b)) = (b, g(b)) \in G(f) \cap G(g).$$

$h(a) < 0$ かつ $h(b) > 0$ のとき, 中間値の定理より, $h(c) = 0$ となる $c \in [a,b]$ が存在する. よって,

$$(c, f(c)) = (c, g(c)) \in G(f) \cap G(g).$$

したがって, $G(f)$ と $G(g)$ は交わる.

2. ベクトル空間および線形写像の定義より,

$$\begin{aligned} f(0_U) &= f(0 \cdot 0_U) \\ &= 0f(0_U) \\ &= 0_V. \end{aligned}$$

よって,

$$(0_U, 0_V) = (0_U, f(0_U)) \in G(f).$$

3. (1) n が偶数のとき,

$$f(I) = [0, +\infty).$$

n が奇数のとき,

$$f(I) = \mathbf{R}.$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

(2) まず,

$$f(I) = [-1, 1].$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \{n\pi | n \in \mathbf{Z}\}.$$

(3) まず,

$$f(I) = [-1, 1].$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \left\{ \frac{\pi}{2} \right\}.$$

(4) まず,

$$f(I) = \mathbf{R}.$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

(5) まず,

$$f(I) = (0, +\infty).$$

よって,

$$f^{-1}(\{0\}) = \emptyset.$$

(6) まず,

$$f(I) = \mathbf{R}.$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \{1\}.$$

4. (1) $\mathrm{Im}\, f$ の定義より,

$$v_1 = f(u_1),\ v_2 = f(u_2)$$

となる $u_1, u_2 \in U$ が存在する.
線形写像の定義より,

$$\begin{aligned} v_1 + v_2 &= f(u_1) + f(u_2) \\ &= f(u_1 + u_2) \in \mathrm{Im}\, f. \end{aligned}$$

(2) $\mathrm{Im}\, f$ の定義より, $v = f(u)$ となる $u \in U$ が存在する.
線形写像の定義より,

$$\begin{aligned} cv &= cf(u) \\ &= f(cu) \in \mathrm{Im}\, f. \end{aligned}$$

(3) 線形写像の定義より,

$$\begin{aligned} f(u_1 + u_2) &= f(u_1) + f(u_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって,

$$u_1 + u_2 \in \mathrm{Ker}\, f.$$

(4) 線形写像の定義より,

$$\begin{aligned} f(cu) &= cf(u) \\ &= c0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって,

$$cu \in \mathrm{Ker}\, f.$$