§5. 全射と単射

写像に関する基本的概念として全射および単射というものが挙げられる.
A, B を集合, f を A から B への写像とする. 任意の $b \in B$ に対して $b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在するとき, f を A から B への上への写像または全射という.
また, $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$ となるとき, f を A から B への１対１の写像または単射という. 対偶を取ると, 単射は $f(a_1) = f(a_2)$ ならば, $a_1 = a_2$ ということである.
全射かつ単射な写像を全単射という.

例 $\mathbf{R}$ で定義された実数値関数 $f_1, f_2, \ldots, f_5$ を

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3,\ f_4(x) = x^3 - x,\ f_5(x) = e^x\ (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, f_1 は全単射, f_2 は全射でも単射でもない, f_3 は全単射, f_4 は全射であるが単射ではない, f_5 は単射であるが全射ではない.

例 (包含写像, 恒等写像)
A が B の部分集合のとき, A から B への写像 ι を

$$\iota(a) = a \quad (a \in A)$$

により定めることができる. このとき, 明らかに ι は単射である. ι を A から B への包含写像という. 特に, $A = B$ のときは ι を A の上の恒等写像という. これを 1_A と表すことにする.

§4 の最後に述べた定理において, 必ずしも等号がなりたたない場合があったことを思い出そう.

命題 f を A から B への写像, A_1, A_2 を A の部分集合, B_1 を B の部分集合とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) f が単射ならば, $f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2)$.
(2) f が単射ならば, $f(A_1 \setminus A_2) = f(A_1) \setminus f(A_2)$.
(3) f が単射ならば, $f^{-1}(f(A_1)) = A_1$.
(4) f が全射ならば, $f(f^{-1}(B_1)) = B_1$.

証明 (1), (4) のみ示す.
(1): まず,

$$f(A_1 \cap A_2) \subset f(A_1) \cap f(A_2)$$

は常になりたつ.
次に, $b \in f(A_1) \cap f(A_2)$ とすると, $b = f(a_1)$ となる $a_1 \in A_1$ および $b = f(a_2)$ となる $a_2 \in A_2$ が存在する.
f は単射だから,

$$a_1 = a_2 \in A_1 \cap A_2.$$

よって,

$$b \in f(A_1 \cap A_2).$$

したがって,

$$f(A_1) \cap f(A_2) \subset f(A_1 \cap A_2).$$

以上より,

$$f(A_1 \cap A_2) = f(A_1) \cap f(A_2).$$

(4): まず,

$$f(f^{-1}(B_1)) \subset B_1$$

は常になりたつ.
次に, $b \in B_1$ とすると, f は全射だから, $b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在する.
$b \in B_1$ だから, $a \in f^{-1}(B_1)$.
よって,

$$b = f(a) \in f(f^{-1}(B_1)).$$

したがって,

$$B_1 \subset f(f^{-1}(B_1)).$$

以上より,

$$f(f^{-1}(B_1)) = B_1.$$

□

集合 A, B に加え, 更に集合 C を考え, f を A から B への写像, g を B から C への写像とすると, A から C への写像 $g \circ f$ を

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad (a \in A)$$

により定めることができる. $g \circ f$ を f と g の合成写像という. 1 変数の微分積分において扱われる合成関数は合成写像の例である.
写像の合成は結合律をみたす. すなわち, 次がなりたつ.

結合律　A, B, C, D を集合, f を A から B への写像, g を B から C への写像, h を C から D への写像とすると,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

証明　$a \in A$ とすると,

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(a).\end{aligned}$$

よって,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

□

次はほとんど明らかであろう.

定理　f を A から B への写像, g を B から C への写像とする. f, g がともに全射ならば, $g \circ f$ も全射.
また, f, g がともに単射ならば, $g \circ f$ も単射.
特に, f, g がともに全単射ならば, $g \circ f$ も全単射.

A から B への写像 f が全単射であるとする. このとき, 任意の $b \in B$ に対して $b = f(a)$ となる $a \in A$ が一意的に存在する. b に a を対応させる規則を f^{-1} と表し, f の逆写像という. f^{-1} は B から A への写像で, 全単射である. 特に, f^{-1} の逆写像は f である.

例　1 変数の微分積分において扱われる逆関数は逆写像の例である.

例えば, $a > 0, a \neq 1$ とすると, $\mathbf{R}$ から区間 $(0, +\infty)$ への写像として定義される指数関数 $f(x) = a^x$ は全単射で, 逆関数は $(0, +\infty)$ から $\mathbf{R}$ への写像として定義される対数関数 $f^{-1}(y) = \log_a y$ である.
その他に逆関数として定義される関数の中でも, 次に述べる逆三角関数は重要である.
区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ から区間 $[-1, 1]$ への写像として定義される正弦関数 $f(x) = \sin x$ は全単射で, 逆関数は $[-1, 1]$ から $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ への写像として定義される. この逆関数を $f^{-1}(y) = \sin^{-1} y$ と表すことにする.
区間 $[0, \pi]$ から区間 $[-1, 1]$ への写像として定義される余弦関数 $f(x) = \cos x$ は全単射で, 逆関数は $[-1, 1]$ から $[0, \pi]$ への写像として定義される. この逆関数を $f^{-1}(y) = \cos^{-1} y$ と表すことにする.
区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ から $\mathbf{R}$ への写像として定義される正接関数 $f(x) = \tan x$ は全単射で, 逆関数は $\mathbf{R}$ から $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ への写像として定義される. この逆関数を $f^{-1}(y) = \tan^{-1} y$ と表すことにする.

例　$\mathbf{R}$ から区間 $(0, 1]$ への全単射を次のように定めることができる.
まず,

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \tan^{-1} x + \frac{1}{2} \quad (x \in \mathbf{R})$$

とおくと, f は $\mathbf{R}$ から区間 $(0, 1)$ への全単射を定める.
次に,

$$g(x) = \begin{cases} 2x & \left(x = \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbf{N} \right), \\ x & \left(x \neq \dfrac{1}{2^n},\ n \in \mathbf{N} \right) \end{cases}$$

とおくと, g は区間 $(0, 1)$ から区間 $(0, 1]$ への全単射を定める.
上の定理より, f と g の合成写像 $g \circ f$ は $\mathbf{R}$ から $(0, 1]$ への全単射である.

定理　f を A から B への写像, g を B から A への写像とする. $f \circ g = 1_B$ ならば, f は全射で g は単射.
特に, $f \circ g = 1_B$ かつ $g \circ f = 1_A$ ならば, f, g は全単射で, g, f はそれぞれ f, g の逆写像.

証明　まず, $b \in B$ とすると, $f \circ g = 1_B$ だから,

$$\begin{aligned} f(g(b)) &= (f \circ g)(b) \\ &= 1_B(b) \\ &= b. \end{aligned}$$

よって, f は全射.
次に,

$$g(b_1) = g(b_2) \quad (b_1, b_2 \in B)$$

とすると,

$$\begin{aligned} b_1 &= f(g(b_1)) \\ &= f(g(b_2)) \\ &= b_2. \end{aligned}$$

よって, g は単射. □

問題 5

1. U, V をベクトル空間, f を U から V への線形写像とする. $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ であることと f が単射であることとは同値であることを示せ.

2. A を集合, f を A から A 自身への写像とし, $n \in \mathbf{N}$ に対して A から A 自身への写像 f^n を

$$f^1 = f,\ f^n = f \circ f^{n-1}\ (n = 2, 3, 4, \dots)$$

により定める. A が有限集合ならば, $f^n(a) = a$ となる $n \in \mathbf{N}$ および $a \in A$ が存在することを示せ.

3. U, V, W をベクトル空間, f を U から V への線形写像, g を V から W への線形写像とすると, f と g の合成写像 $g \circ f$ は U から W への線形写像であることを示せ.

4. 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

をそれぞれ次の (1)〜(3) の区間 I から区間 J への写像と考えると, 逆関数が存在することが分かる. これらの逆関数をそれぞれ $\sinh^{-1} y$, $\cosh^{-1} y$, $\tanh^{-1} y$ と表すことにする. $\sinh^{-1} y$, $\cosh^{-1} y$, $\tanh^{-1} y$ を具体的に表せ.
(1) $I = \mathbf{R},\ J = \mathbf{R}$.
(2) $I = [0, +\infty),\ J = [1, +\infty)$.
(3) $I = \mathbf{R},\ J = (-1, 1)$.

問題 5 の解答

1. まず, $\operatorname{Ker} f = \{0\}$ であると仮定する.
$u, v \in U$ が

$$f(u) = f(v)$$

をみたすとすると, f は線形写像だから,

$$f(u-v) = 0.$$

仮定より,

$$u - v = 0.$$

すなわち,

$$u = v.$$

よって, f は単射.
逆に, f が単射であると仮定する.
$u \in \operatorname{Ker} f$ とすると,

$$\begin{aligned} f(u) &= 0 \\ &= f(0). \end{aligned}$$

仮定より,

$$u = 0.$$

よって,

$$\operatorname{Ker} f = \{0\}.$$

2. A は有限集合だから,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

と表すことができる.
このとき, $(m+1)$ 個の元 $f^1(a_1), f^2(a_1), \ldots, f^{m+1}(a_1)$ のうち少なくとも 2 つは等しいから,
$i < j$ となる $i, j \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ が存在し

$$f^i(a_1) = f^j(a_1).$$

よって,

$$a = f^i(a_1),\ n = j - i$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f^n(a) &= f^{j-i}(f^i(a_1)) \\ &= f^j(a_1) \\ &= f^i(a_1) \\ &= a. \end{aligned}$$

3. まず, $u, v \in U$ とすると,

$$\begin{aligned} (g \circ f)(u+v) &= g(f(u+v)) \\ &= g(f(u) + f(v)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v). \end{aligned}$$

次に, $c \in \mathbf{R}$, $u \in U$ とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(cu) &= g(f(cu)) \\ &= g(cf(u)) \\ &= cg(f(u)) \\ &= c(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

よって, $g \circ f$ は U から W への線形写像.

4. (1) まず,

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

とおくと,

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

$e^x > 0$ だから,

$$\begin{aligned}e^x &= y \pm \sqrt{y^2+1} \\ &= y + \sqrt{y^2+1}.\end{aligned}$$

よって,

$$\sinh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

(2) まず,

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

とおくと,

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

$e^x \geq 1$ だから,

$$\begin{aligned}e^x &= y \pm \sqrt{y^2-1} \\ &= y + \sqrt{y^2-1}.\end{aligned}$$

よって,

$$\cosh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2-1}).$$

(3) まず,

$$y = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

とおくと,

$$y = \frac{e^{2x}-1}{e^{2x}+1}.$$

すなわち,

$$(1-y)(e^x)^2 = 1 + y.$$

よって,

$$\tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$