§8. Bernstein の定理

2 つの集合の濃度が等しいことを示すために, 具体的に全単射を構成することは必ずしも易しいことではないが, 次に述べる Bernstein の定理が有効な場合がある.

Bernstein の定理 A, B を集合とする. A から B および B から A への単射が存在するならば, $A \sim B$.

証明 f を A から B への単射, g を B から A への単射とする.
$b \in B$ に対して $b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在するとき, $b \hookleftarrow a$ と表すことにする.
f は単射だから, このような a は存在するならば一意的.
同様に, $a \in A$ に対して $a = g(b)$ となる $b \in B$ が存在するとき, $a \hookleftarrow b$ と表す.
このとき, A の部分集合 A_∞, A_A, A_B および B の部分集合 B_∞, B_A, B_B を

$$\begin{aligned}
A_\infty &= \{a \in A | a \hookleftarrow b_1 \hookleftarrow a_1 \hookleftarrow b_2 \hookleftarrow a_2 \hookleftarrow \cdots\},\\
A_A &= \left\{ a \in A \middle| \begin{array}{l} a = a_1 \hookleftarrow b_1 \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow b_{n-1} \hookleftarrow a_n \text{ で},\\ a_n = g(b_n) \text{ となる } b_n \in B \text{ は存在しない} \end{array} \right\},\\
A_B &= \left\{ a \in A \middle| \begin{array}{l} a \hookleftarrow b_1 \hookleftarrow a_1 \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow a_{n-1} \hookleftarrow b_n \text{ で},\\ b_n = f(a_n) \text{ となる } a_n \in A \text{ は存在しない} \end{array} \right\},\\
B_\infty &= \{b \in B | b \hookleftarrow a_1 \hookleftarrow b_1 \hookleftarrow a_2 \hookleftarrow b_2 \hookleftarrow \cdots\},\\
B_A &= \left\{ b \in B \middle| \begin{array}{l} b \hookleftarrow a_1 \hookleftarrow b_1 \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow b_{n-1} \hookleftarrow a_n \text{ で},\\ a_n = g(b_n) \text{ となる } b_n \in B \text{ は存在しない} \end{array} \right\},\\
B_B &= \left\{ b \in B \middle| \begin{array}{l} b = b_1 \hookleftarrow a_1 \hookleftarrow \cdots \hookleftarrow a_{n-1} \hookleftarrow b_n \text{ で},\\ b_n = f(a_n) \text{ となる } a_n \in A \text{ は存在しない} \end{array} \right\}
\end{aligned}$$

により定める.
このとき,

$$A = A_\infty \cup A_A \cup A_B,\ B = B_\infty \cup B_A \cup B_B,$$

$$f(A_\infty) = B_\infty,\ f(A_A) = B_A,\ g(B_B) = A_B$$

で, A_∞, A_A, A_B および B_∞, B_A, B_B はそれぞれ互いに交わらない.
f, g は単射だから, f は A_∞ から B_∞ および A_A から B_A への全単射, g は B_B から A_B への全単射を定める.
よって, A から B への写像 h を

$$h(x) = \begin{cases} f(x) & (x \in A_\infty \cup A_A),\\ g^{-1}(x) & (x \in A_B) \end{cases}$$

により定めると, h は全単射.
したがって, $A \sim B$. □

例 まず, $[0, 1]$ から $\mathbf{R}$ への包含写像は単射である.
次に, §5 において示したように, $\mathbf{R}$ から開区間 $(0, 1)$ への全単射が存在する. この写像と $(0, 1)$ から $[0, 1]$ への包含写像の合成写像は $\mathbf{R}$ から $[0, 1]$ への単射となる.
よって, Bernstein の定理より, $\mathbf{R} \sim [0, 1]$.

例 $a, b \in (0, 1]$ を 10 進法により

$$a = 0.a_1a_2a_3\ldots,\ b = 0.b_1b_2b_3\ldots$$

と無限小数に展開しておく.
ここで,

$$c = 0.a_1 b_1 a_2 b_2 a_3 b_3 \ldots$$

とおくと, $c \in (0,1]$.
この対応は $(0,1] \times (0,1]$ から $(0,1]$ への単射を定める.
一方, $x \in (0,1]$ に $(x,x) \in (0,1] \times (0,1]$ を対応させると, これは $(0,1]$ から $(0,1] \times (0,1]$ への単射を定める.
よって, Bernstein の定理より, $(0,1] \times (0,1] \sim (0,1]$.
$\mathbf{R} \sim (0,1]$ だから, $\mathbf{R} \times \mathbf{R} \sim \mathbf{R}$.

上の例において, 組 (a,b) から c への対応は単射を定めるが, 全射とはならない.
なぜならば, 例えば

$$c = 0.11010101\ldots$$

に対応する (a,b) は存在しないからである.
$(0,1] \times (0,1]$ から $(0,1]$ への全単射は次に述べる Kőnig の記法を用いて定めることができる.

例 (Kőnig の記法)
$x \in (0,1]$ を 10 進法により

$$x = 0.x_1 x_2 x_3 \ldots$$

と無限小数に展開しておく.
$x_1, x_2, x_3, \ldots$ の中で 0 と異なるものを順に選び

$$x_{n(1)}, x_{n(2)}, x_{n(3)}, \ldots \quad (n(1) < n(2) < n(3) < \cdots)$$

とする.
ここで,

$$\bar{x}_{k+1} = x_{n(k)+1} x_{n(k)+2} \cdots x_{n(k+1)} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots,\ n(0) = 0)$$

とおくと,

$$x = 0.\bar{x}_1 \bar{x}_2 \bar{x}_3 \ldots$$

と表される. これが Kőnig の記法である.
例えば,

$$x = 0.00908706005\ldots$$

のときは

$$\bar{x}_1 = 009,\ \bar{x}_2 = 08,\ \bar{x}_3 = 7,\ \bar{x}_4 = 06,\ \bar{x}_5 = 005,\ \ldots$$

である.
Kőnig の記法を用いて, $a, b \in (0,1]$ を

$$a = 0.\bar{a}_1 \bar{a}_2 \bar{a}_3 \ldots,\ b = 0.\bar{b}_1 \bar{b}_2 \bar{b}_3 \ldots$$

と表しておき,

$$c = 0.\bar{a}_1 \bar{b}_1 \bar{a}_2 \bar{b}_2 \bar{a}_3 \bar{b}_3 \ldots$$

とおくと, $c \in (0,1]$.
この対応は $(0,1] \times (0,1]$ から $(0,1]$ への全単射を定める.

更に, 2 つの集合の濃度を比較することを考えよう.

A, B を集合とする. A から B への単射は存在するが $A \not\sim B$ のとき, A は B より濃度が小さい, または B は A より濃度が大きいという.

例　A を集合とし, A から 2^A への写像 f を

$$f(a) = \{a\} \quad (a \in A)$$

により定めると, f は単射.
一方, Cantor の定理より, A から 2^A への全単射は存在しないから, $A \not\sim 2^A$.
よって, 2^A は A より濃度が大きい.

例　$2^{\mathbf{N}}$ の部分集合 P_1, P_2, P_3 を

$$P_1 = \{A \in 2^{\mathbf{N}} | A \text{ は有限集合}\},\ P_2 = \{A \in 2^{\mathbf{N}} | \mathbf{N} \setminus A \text{ は有限集合}\},\ P_3 = 2^{\mathbf{N}} \setminus (P_1 \cup P_2)$$

により定める.
このとき,

$$2^{\mathbf{N}} = P_1 \cup P_2 \cup P_3$$

で, P_1, P_2, P_3 は互いに交わらない.
まず, P_1 から $\mathbf{N}$ への写像 f を

$$f(A) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 2^{n-1} \cdot \chi_A(n) \quad (A \in P_1)$$

により定める. ただし, χ_A は問題 7 においても現れた A の定義関数である.
このとき, f は全単射となるから, P_1 は可算集合.
次に, P_2 から P_1 への写像 g を

$$g(A) = \mathbf{N} \setminus A \quad (A \in P_2)$$

により定める.
このとき, g は全単射となるから, P_2 は可算集合.
更に, P_1, P_2 は可算集合だから, $P_1 \cup P_2$ も可算集合.
よって,

$$\begin{aligned} 2^{\mathbf{N}} &\sim P_1 \cup P_2 \cup P_3 \\ &\sim P_2 \cup P_3. \end{aligned}$$

ここで, $P_2 \cup P_3$ は $\mathbf{N}$ の無限部分集合全体.
$P_2 \cup P_3$ から区間 $(0, 1]$ への写像 h を

$$h(A) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} \cdot \chi_A(n) \quad (A \in P_2 \cup P_3)$$

により定める.
このとき, h は全単射となるから,

$$\begin{aligned} P_2 \cup P_3 &\sim (0, 1] \\ &\sim \mathbf{R}. \end{aligned}$$

したがって, $2^{\mathbf{N}} \sim \mathbf{R}$.

問題 8

1. A_1, A_2, A_3 を集合とする. $A_1 \subset A_2 \subset A_3$ かつ $A_1 \sim A_3$ ならば, $A_1 \sim A_2$ かつ $A_2 \sim A_3$ であることを示せ.

2. 集合 A から集合 B への写像全体の集合を $F(A, B)$ と表すことにする.

(1) A, B, A', B' を集合とする. $A \sim A'$ かつ $B \sim B'$ ならば,

$$F(A, B) \sim F(A', B')$$

がなりたつことを示せ.

(2) A, B, C を集合とすると,

$$F(A \times B, C) \sim F(A, F(B, C))$$

がなりたつことを示せ.

(3) $F(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \sim \mathbf{R}$ を示せ.

(4) $F(\mathbf{R}, \mathbf{R}) \sim 2^{\mathbf{R}}$ を示せ.

3. $\mathbf{R}$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C(\mathbf{R})$ と表すことにする. $C(\mathbf{R}) \sim \mathbf{R}$ を示せ.

4. 無理数全体の集合と $\mathbf{R}$ は濃度が等しいことを示せ.

問題 8 の解答

1. ι_1, ι_2 をそれぞれ A_1 から A_2 および A_2 から A_3 への包含写像とする.
$A_1 \sim A_3$ だから, A_3 から A_1 への全単射 f が存在する.
まず, ι_1 は A_1 から A_2 への単射.
また, 合成写像 $f \circ \iota_2$ は A_2 から A_1 への単射.
よって, Bernstein の定理より, $A_1 \sim A_2$.
次に, ι_2 は A_2 から A_3 への単射.
また, 合成写像 $\iota_1 \circ f$ は A_3 から A_2 への単射.
よって, Bernstein の定理より, $A_2 \sim A_3$.

2. (1) $A \sim A'$ かつ $B \sim B'$ だから, A から A' および B から B' への全単射 f, g が存在する.
$F(A, B)$ から $F(A', B')$ への写像 Φ を

$$(\Phi(h))(a') = (g \circ h \circ f^{-1})(a') \quad (h \in F(A, B),\ a' \in A')$$

により定める.
このとき, Φ は全単射となるから,

$$F(A, B) \sim F(A', B').$$

(2) $f \in F(A \times B, C)$ および $a \in A$ に対して

$$f_a(b) = f(a, b) \quad (b \in B)$$

とおくと, $f_a \in F(B, C)$ となる.
ここで, $F(A \times B, C)$ から $F(A, F(B, C))$ への写像 Ψ を

$$(\Psi(f))(a) = f_a \quad (a \in A)$$

により定める.
このとき, Ψ は全単射となるから,

$$F(A \times B, C) \sim F(A, F(B, C)).$$

(3) まず, 自然に

$$F(\mathbf{N}, \{0, 1\}) \subset F(\mathbf{N}, \mathbf{N}) \subset F(\mathbf{N}, \mathbf{R})$$

とみなすことができる.
ここで,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{N}, \{0, 1\}) &\sim 2^{\mathbf{N}} \\ &\sim \mathbf{R}. \end{aligned}$$

また, (1), (2) より,

$$\begin{aligned} F(\mathbf{N}, \mathbf{R}) &\sim F(\mathbf{N}, F(\mathbf{N}, \{0, 1\})) \\ &\sim F(\mathbf{N} \times \mathbf{N}, \{0, 1\}) \\ &\sim F(\mathbf{N}, \{0, 1\}) \\ &\sim \mathbf{R}. \end{aligned}$$

よって, $F(\mathbf{N},\mathbf{N}) \sim \mathbf{R}$.

(4) (1), (2) より,

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{R},\mathbf{R}) &\sim F(\mathbf{R}, F(\mathbf{N},\{0,1\})) \\
&\sim F(\mathbf{R}\times\mathbf{N},\{0,1\}) \\
&\sim F(\mathbf{R},\{0,1\}) \\
&\sim 2^{\mathbf{R}}.
\end{aligned}
$$

よって, $F(\mathbf{R},\mathbf{R}) \sim 2^{\mathbf{R}}$.

3. $f, g \in C(\mathbf{R})$ とする.

f, g は連続だから, 任意の $x \in \mathbf{Q}$ に対して $f(x) = g(x)$ ならば, $f = g$.

よって, 定義域を $\mathbf{Q}$ に制限することにより, $C(\mathbf{R})$ から $F(\mathbf{Q},\mathbf{R})$ への単射を定めることができる.

ここで,

$$
\begin{aligned}
F(\mathbf{Q},\mathbf{R}) &\sim F(\mathbf{N}, 2^{\mathbf{N}}) \\
&\sim F(\mathbf{N}, F(\mathbf{N},\{0,1\})) \\
&\sim F(\mathbf{N}\times\mathbf{N},\{0,1\}) \\
&\sim F(\mathbf{N},\{0,1\}) \\
&\sim \mathbf{R}.
\end{aligned}
$$

したがって, $C(\mathbf{R})$ から $\mathbf{R}$ への単射が存在する.

一方, 定数関数を考えると, $\mathbf{R}$ から $C(\mathbf{R})$ への単射が存在する.

したがって, Bernstein の定理より, $C(\mathbf{R}) \sim \mathbf{R}$.

4. $\mathbf{Q}$ から $\mathbf{R}$ への包含写像は単射.

また, $\mathbf{Q}$ は可算集合で, $\mathbf{R}$ は可算集合でないから, $\mathbf{R}$ は $\mathbf{Q}$ より濃度が大きい.

よって, $x_0 \in \mathbf{R}\setminus\mathbf{Q}$ が存在する.

ここで, $\mathbf{R}$ の部分集合 A, B を

$$
A = \{rx_0 | r \in \mathbf{Q}\setminus\{0\}\},\ B = \mathbf{R}\setminus(\mathbf{Q}\cup A)
$$

により定める.

このとき,

$$
\mathbf{R} = \mathbf{Q}\cup A\cup B
$$

で, $\mathbf{Q}, A, B$ は互いに交わらない.

更に, $\mathbf{Q}, A$ は可算集合だから, $\mathbf{Q}\cup A$ も可算集合.

よって,

$$
\begin{aligned}
\mathbf{R} &\sim \mathbf{Q}\cup A\cup B \\
&\sim A\cup B.
\end{aligned}
$$

ここで, $A\cup B$ は無理数全体の集合.

したがって, 無理数全体の集合と $\mathbf{R}$ は濃度が等しい.