§11. 選択公理

有限個の集合からそれぞれの元を一斉に選ぶことは可能であるが, 選択公理とは集合の個数が無限個の場合もこのような操作を認めるものである.
$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を添字集合 Λ によって添字付けられた集合族とする. Λ から $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の和集合 $\bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ への写像 f で, 任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $f(\lambda)\in A_\lambda$ となるもの全体の集合を $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ と表し, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の直積という. また, 各 A_λ を直積因子という.
$\Lambda=\{1,2\}$ のとき, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は A_1 と A_2 の直積 $A_1\times A_2$ と同一視できる.
$\Lambda=\{1,2,\dots,n\}$ のときは $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を $A_1\times A_2\times\cdots\times A_n$ または $\prod_{i=1}^{n} A_i$ とも表す.
$\Lambda=\mathbf{N}$ のときは $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を $\prod_{n=1}^{\infty} A_n$ とも表す.
選択公理は次のように述べることができる.

選択公理　集合族 $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ が任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $A_\lambda\neq\emptyset$ をみたすならば, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\neq\emptyset$.

以下では, 選択公理を認めよう.
$(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を任意の $\lambda\in\Lambda$ に対して $A_\lambda\neq\emptyset$ となる集合族とし, $f\in\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ とする. f を $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ の選択関数という. また, $\lambda_0\in\Lambda$ を固定したとき, $f(\lambda_0)$ を f の λ_0 成分という. f に $f(\lambda_0)$ を対応させることにより定まる $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ から A_{λ_0} への写像を p_{λ_0} と表すことにする. p_{λ_0} を $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ から A_{λ_0} への射影という.
次の定理では証明に選択公理が用いられる. §5 の最後に述べた定理も思い出そう.

定理　A, B を集合, f を A から B への写像とする. f が全射となるための必要十分条件は $f\circ s = 1_B$ となる B から A への写像 s が存在すること.

証明　まず, f が全射であると仮定すると, 任意の $b\in B$ に対して $f^{-1}(b)\neq\emptyset$.
よって, 選択公理より,

$$s\in\prod_{b\in B} f^{-1}(b)$$

を選ぶことができる.
s は B から A への写像を定め, 任意の $b\in B$ に対して $s(b)\in f^{-1}(b)$.
したがって, $f(s(b))=b$. すなわち, $f\circ s=1_B$.
逆は容易である. □

注意　上の定理において, f が全射ならば, s は単射となるから, $A\sim B$ または A は B より濃度が大きい.

A を空でない集合とすると, 選択公理より,

$$f\in\prod_{B\in 2^A\setminus\{\emptyset\}} B$$

を選ぶことができる.
このとき, 任意の $B\in 2^A\setminus\{\emptyset\}$ に対して $f(B)\in B$.
これは A の空でない各部分集合から元を一斉に選ぶことができることを意味する.

上の f を A 上の選択関数という.
この事実を用いて次を示そう.

定理　無限集合は可算部分集合を含む.
特に, 可算集合は無限集合の中で濃度が最も小さい.

証明　A を無限集合とすると, $A \neq \emptyset$.
f を A 上の選択関数とし, 各 $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \in A$ を

$$\begin{cases} a_1 = f(A), \\ a_n = f(A \setminus \{a_1, \dots, a_{n-1}\}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots) \end{cases}$$

により定める.
ここで, $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$ とすると,

$$a_m = f(A \setminus \{a_1, \dots, a_{m-1}\}) \in A \setminus \{a_1, \dots, a_{m-1}\}.$$

一方,

$$a_n \notin A \setminus \{a_1, \dots, a_{m-1}\}$$

だから, $a_m \neq a_n$.
よって, 集合 $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ は A の可算部分集合. □

選択公理は数学の様々な場面で現れる重要なものである. 1 変数の微分積分から例を挙げよう.

例　f を区間 I で定義された実数値関数とし, $a \in I$ とすると, 次の (1), (2) は同値である.

(1) f は a で連続である.
(2) 任意の $n \in \mathbf{N}$ に対して $a_n \in I$ で, かつ a に収束する任意の数列 $\{a_n\}$ に対して, 数列 $\{f(a_n)\}$ は $f(a)$ に収束する.

(2) から (1) を導くには対偶を示せばよいが, その際に選択公理が用いられる. 証明に現れる添字集合は可算集合となるので, この場合の選択公理は可算選択公理ともいう.

選択公理は次の Zorn の補題および整列定理と同値である.

Zorn の補題　任意の全順序部分集合が上界をもつような順序集合は極大元をもつ.

整列定理　任意の空でない集合に順序関係を定めて整列集合にすることができる.

任意の全順序部分集合が上界をもつような順序集合は帰納的であるという. よって, Zorn の補題を言い替えると, 帰納的順序集合は極大元をもつということになる.
整列定理から選択公理を導くことは比較的容易である.

定理　選択公理, Zorn の補題, 整列定理は互いに同値.

証明　整列定理から選択公理が導かれることのみ示す.
$(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を添字集合 Λ によって添字付けられた集合族とし, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ とする.
整列定理により, 和集合 $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ を整列集合にしておく.
Λ から $\bigcup_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda$ への写像 f を

$$f(\lambda) = \min A_\lambda \quad (\lambda \in \Lambda)$$

により定めると, $f(\lambda) \in A_\lambda$.
よって, f は $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ の選択関数.
したがって, 選択公理がなりたつ. □

整列定理と §10 において扱った超限帰納法を用いて次を示そう.

定理 次の (1), (2) をみたす $\mathbf{R}$ の部分集合 H が存在する.

(1) 異なる $x_1, x_2, \ldots, x_m \in H$ および $r_1, r_2, \ldots, r_m \in \mathbf{Q}$ に対して

$$r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_m x_m = 0$$

ならば,

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_m = 0.$$

(2) 任意の $x \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ に対して

$$x = r_1 x_1 + r_2 x_2 + \cdots + r_n x_n$$

となる $x_1, x_2, \ldots, x_n \in H$ および $r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbf{Q}$ が一意的に存在する.

証明 $W = \mathbf{R} \setminus \{0\}$ とおき, 整列定理により, W に順序関係 $\leq$ を定めて整列集合にしておく.
$\mathbf{R}$ の部分集合 H を

$$H = \left\{ x \in W \,\middle|\, \begin{array}{l} x = r_1x_1 + r_2x_2 + \cdots + r_nx_n \text{ となる } x_1, x_2, \ldots, x_n \in \\ W\langle x \rangle \text{ および } r_1, r_2, \ldots, r_n \in \mathbf{Q} \text{ は存在しない} \end{array} \right\}$$

により定める.
まず, (1) の仮定がなりたつとする.
このとき, W の順序関係 $\leq$ に関して $x_1 < x_2 < \cdots < x_m$ としてよい.
$r_m \neq 0$ と仮定すると,

$$x_m = -\frac{r_1}{r_m} x_1 - \frac{r_2}{r_m} x_2 - \cdots - \frac{r_{m-1}}{r_m} x_{r-1}.$$

H の定義より, これは矛盾.
よって, $r_m = 0$.
以下, 同様に,

$$r_1 = r_2 = \cdots = r_{m-1} = 0.$$

したがって, (1) がなりたつ.
次に, (2) がなりたつことを超限帰納法により示す.
(1) より, 一意性は容易である.
$x = a \in W$ のとき (2) がなりたつという命題を $P(a)$ とおく.
$a = \min W$ のとき, $\min W \in H$ だから, $P(a)$ は真.
$b \in W\langle a \rangle$ のとき, $P(b)$ が真であると仮定する.
$a \in H$ のとき, $P(a)$ は真.
$a \notin H$ のとき, H の定義および超限帰納法の仮定より, $P(a)$ は真.
したがって, (2) がなりたつ. □

上の定理に現れた H を $\mathbf{R}$ に対する Hamel の基底という. Hamel の基底はベクトル空間に対する基底の概念の特別な場合である. よって, 上の定理の証明と同様に, 任意のベクトル空間が基底をもつことを示すことができる. 実は, 正則性公理というものを用いることにより, 逆に任意のベクトル空間が基底をもつことから選択公理が導かれることが知られている.

問題 11

1. $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を集合族とする.

(1) $\lambda_0 \in \Lambda$ とする. 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \neq \emptyset$ ならば, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ から A_{λ_0} への射影 p_{λ_0} は全射であることを示せ.

(2) 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して A_λ が少なくとも 2 つの元を含むならば, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \sim \Lambda$ または $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は Λ より濃度が大きいことを示せ.

2. 任意の無限集合は濃度が等しい真部分集合を含むことを示せ.

3. $\mathfrak{I}$ を次の (1), (2) をみたす集合系とする.

(1) $\mathfrak{I}$ の元は開区間.
(2) 任意の異なる $I, J \in \mathfrak{I}$ に対して $I \cap J = \emptyset$.

このとき, $\mathfrak{I}$ は高々可算集合であることを示せ.

4. $(A, \leq)$ を順序集合とする. A の部分集合 $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ は

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > \cdots$$

をみたすとき, A における降鎖という.
A が整列集合であるための必要十分条件は A における降鎖が存在しないことであることを示せ.

5. A, B を空でない集合とする. 整列定理を用いることにより, 次の (1)〜(3) の何れか 1 つのみがなりたつことを示せ.

(1) $A \sim B$.
(2) A は B より濃度が大きい.
(3) A は B より濃度が小さい.

6. $x, y \in \mathbf{R}$ に対して $x - y \in \mathbf{Q}$ のとき, xRy と定めると, R は $\mathbf{R}$ 上の同値関係であることを示せ. なお, 上の同値関係と選択公理を用いることにより, Lebesgue 非可測集合という集合を構成することができる.

問題 11 の解答

1. (1) 選択公理より, $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を選ぶことができる.

$a \in A_{\lambda_0}$ とし, $g \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を

$$g(\mu) = \begin{cases} a & (\mu = \lambda_0), \\ f(\mu) & (\mu \in \Lambda,\ \mu \neq \lambda_0) \end{cases}$$

により定めると, $p_{\lambda_0}(g) = a$.

よって, p_{λ_0} は全射.

(2) 選択公理より, $f \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ を選ぶことができる.

仮定より, 任意の $\lambda \in \Lambda$ に対して $A_\lambda \backslash \{f(\lambda)\} \neq \emptyset$ だから, 選択公理より, $g \in \prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \backslash \{f(\lambda)\}$ を選ぶことができる.

Λ から $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ への写像 h を

$$(h(\lambda))(\mu) = \begin{cases} f(\lambda) & (\mu = \lambda), \\ g(\lambda) & (\mu \neq \lambda) \end{cases}$$

により定める.

$\lambda, \lambda \in \Lambda$, $\lambda \neq \lambda'$ とすると,

$$\begin{aligned} (h(\lambda))(\lambda) &= f(\lambda) \\ &\neq g(\lambda) \\ &= h(\lambda')(\lambda). \end{aligned}$$

よって, h は単射だから, $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda \sim \Lambda$ または $\prod_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda$ は Λ より濃度が大きい.

2. A を無限集合とすると, A はある可算部分集合 $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ を含み,

$$A = (A \setminus \{a_n | n \in \mathbf{N}\}) \cup \{a_n | n \in \mathbf{N}\}.$$

ここで,

$$B = (A \setminus \{a_n | n \in \mathbf{N}\}) \cup \{a_{2n} | n \in \mathbf{N}\}$$

とおくと, B は A の真部分集合.

また, A から B への写像 f を

$$f(a) = \begin{cases} a & (a \in A \setminus \{a_n | n \in \mathbf{N}\}), \\ a_{2n} & (\text{ある } n \in \mathbf{N} \text{ に対して } a = a_n) \end{cases}$$

により定めると, f は全単射.

よって, 任意の無限集合は濃度が等しい真部分集合を含む.

3. $\mathfrak{I}$ の元となるある開区間に含まれる有理数全体の集合を A とおく.

A は $\mathbf{Q}$ の無限部分集合となるから, 可算集合.

$r \in A$ とすると, (2) より, $r \in I$ となる $I \in \mathfrak{I}$ は一意的に存在する.

A の定義より, r から I への対応は A から $\mathfrak{I}$ への全射を定める.
よって, $A \sim \mathfrak{I}$ または A は $\mathfrak{I}$ より濃度が大きい.
したがって, $\mathfrak{I}$ は高々可算集合.

4. まず, A における降鎖 $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ が存在すると仮定する.
このとき, $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ は最小元をもたないから, A は整列集合ではない.
逆に, A が整列集合ではないと仮定する.
このとき, A の空でない部分集合 M で, 最小元をもたないものが存在する.
よって, $a \in M$ に対して M の部分集合 M_a を

$$M_a = \{x \in M | x < a\}$$

により定めると, $M_a \neq \emptyset$.
選択公理より, 各 $a \in M$ に対して $f(a) \in M_a$ を選ぶことができる.
$a_1 \in M$ を 1 つ選んでおき, A の部分集合 $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ を

$$a_n = f(a_{n-1}) \quad (n = 2, 3, 4, \dots)$$

により定めると, $\{a_n | n \in \mathbf{N}\}$ は A における降鎖.

5. 整列定理により, A, B を整列集合にしておく.
整列集合の比較定理より, 次の (a)〜(c) の何れか 1 つのみがなりたつ.

(a) $A \simeq B$.
(b) $A \simeq B\langle b\rangle$ となる $b \in B$ が存在する.
(c) $A\langle a\rangle \simeq B$ となる $a \in A$ が存在する.

(a) のとき, $A \sim B$.
よって, (1) がなりたつ.
(b) のとき, A から B への単射が存在する.
よって, (1) または (3) がなりたつ.
同様に, (c) のとき, (1) または (2) がなりたつ.
更に, Bernstein の定理より, (1)〜(3) の何れか 1 つのみがなりたつ.

6. $x, y, z \in \mathbf{R}$ とする.
まず,

$$x - x = 0 \in \mathbf{Q}.$$

よって, xRx だから, R は反射律をみたす.
次に, xRy とすると, $x - y \in \mathbf{Q}$ だから,

$$y - x = -(x - y) \in \mathbf{Q}.$$

よって, yRx だから, R は対称律をみたす.
更に, xRy かつ yRz とすると, $x - y, y - z \in \mathbf{Q}$ だから,

$$x - z = (x - y) + (y - z) \in \mathbf{Q}.$$

よって, xRz だから, R は推移律をみたす.
以上より, R は $\mathbf{R}$ 上の同値関係.