§12. Euclid 空間の位相

Euclid 空間は微分積分や線形代数においても現れる重要な位相空間である. 簡単のため, ここでは実 Euclid 空間を扱い, 複素 Euclid 空間は扱わないことにする.
$n \in \mathbf{N}$ を固定しておき, $\mathbf{R}$ の n 個の直積を $\mathbf{R}^n$ と表す. このとき,

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\}$$

と表すことができる. $\mathbf{R}^1$ は $\mathbf{R}$ のことである. また, $\mathbf{R}, \mathbf{R}^2, \mathbf{R}^3$ はそれぞれ直線, 平面, 空間と同一視することが多い. 更に, $\mathbf{R}^n$ の元を点ともいう. なお, 微分積分では $\mathbf{R}^n$ の点は上のように表すことが多いが, 線形代数では上のような行ベクトルではなく, 列ベクトルで表すことが多い.
$\mathbf{R}^n$ は §3 においても現れたベクトル空間の例である. $\mathbf{R}^n$ の 2 つの元 $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して和 $x + y \in \mathbf{R}^n$ およびスカラー倍 $cx \in \mathbf{R}^n$ はそれぞれ

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n), \ cx = (cx_1, cx_2, \ldots, cx_n)$$

により定められる. 零ベクトル 0 は $(0, 0, \ldots, 0)$ と表される元である.
更に, $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 $\langle \ , \ \rangle$ を

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n$$

により定める. $\langle \ , \ \rangle$ を $\mathbf{R}^n$ の標準内積, $\langle x, y \rangle$ を x と y の内積という. また, $\mathbf{R}^n$ に標準内積 $\langle \ , \ \rangle$ を考えたものを n 次元実 Euclid 空間, または単に n 次元 Euclid 空間という.
x と y の内積 $\langle x, y \rangle$ は行列の積を用いて $x^t y$ と表しておくと, 計算が容易になる場合がある. ただし, ${}^t y$ は y の転置行列である.
以下では n 次元 Euclid 空間としての $\mathbf{R}^n$ を考える.

定理 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(4) がなりたつ.
(1) $\langle x + y, z \rangle = \langle x, z \rangle + \langle y, z \rangle$.
(2) $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle$.
(3) $\langle y, x \rangle = \langle x, y \rangle$.
(4) $x \neq 0$ ならば, $\langle x, x \rangle > 0$.

一般の $\mathbf{R}$ 上のベクトル空間に対しても上の定理の (1)〜(4) のような性質をもつ関数 $\langle \ , \ \rangle$ を考えると, 内積空間というものを定義することができる.
標準内積を用いて $\mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 $\| \ \|$ を

$$\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle} \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. 定義より, $\|x\| \geq 0$ で, $\|x\| = 0$ となるのは $x = 0$ のときのみである. $\| \ \|$ を $\mathbf{R}^n$ のノルム, $\|x\|$ を x のノルムまたは長さという.

定理 $x, y \in \mathbf{R}^n$, $c \in \mathbf{R}$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\|cx\| = |c|\|x\|$.
(2) $|\langle x, y \rangle| \leq \|x\|\|y\|$ (Cauchy-Schwarz の不等式).
(3) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (三角不等式).

証明 (2), (3) のみ示す.
(2): $y = 0$ のときは明らか.
$y \neq 0$ のとき,

$$\langle y, y \rangle > 0$$

に注意すると,

$$
\begin{aligned}
0 &\leq \left\langle x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y, x - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle} y \right\rangle \langle y, y\rangle \\
&= \left(\langle x, x\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle x, y\rangle - \frac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}\langle y, x\rangle + \frac{\langle x, y\rangle^2}{\langle y, y\rangle^2}\langle y, y\rangle \right) \langle y, y\rangle \\
&= \|x\|^2\|y\|^2 - |\langle x, y\rangle|^2.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
|\langle x, y\rangle|^2 \leq \|x\|^2\|y\|^2.
$$

すなわち,

$$
|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|.
$$

(3): (2) より,

$$
\begin{aligned}
\|x+y\|^2 &= \langle x+y, x+y\rangle \\
&= \|x\|^2 + 2\langle x, y\rangle + \|y\|^2 \\
&\leq \|x\|^2 + 2\|x\|\|y\| + \|y\|^2 \\
&= (\|x\| + \|y\|)^2.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|.
$$

□

ノルムを用いて $\mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$ で定義された実数値関数 d を

$$
d(x, y) = \|x - y\| \quad (x, y \in \mathbf{R}^n)
$$

により定める. d を $\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離, $d(x, y)$ を x と y の Euclid 距離という.

定理 $x, y, z \in \mathbf{R}^n$ とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $d(x, y) \geq 0$ で, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときのみ.
(2) $d(y, x) = d(x, y)$.
(3) $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

証明 (3) のみ示す.
ノルムに関する三角不等式より,

$$
\begin{aligned}
\|x - z\| &= \|(x - y) + (y - z)\| \\
&\leq \|x - y\| + \|y - z\|.
\end{aligned}
$$

よって,

$$
d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z).
$$

□

一般の集合に対しても上の定理の (1)〜(3) のような性質をもつ関数 d を考えると, 距離空間というものを定義することができる. 距離空間は更に位相空間というものに一般化することができる.
$\mathbf{R}^n$ の位相に関して特に基本的な概念について述べていこう.

$a \in \mathbf{R}^n$, $\varepsilon > 0$ とし, $\mathbf{R}^n$ の部分集合 $B(a;\varepsilon)$ を

$$B(a;\varepsilon) = \{x \in \mathbf{R}^n | d(a,x) < \varepsilon\}$$

により定める. $B(a;\varepsilon)$ を a を中心とする半径 ε の球体という. 例えば, $n = 1$ のときは $B(a;\varepsilon)$ は開区間 $(a-\varepsilon, a+\varepsilon)$ で, $n = 2$ のときは $B(a;\varepsilon)$ は円板である.
M を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とし, $a \in \mathbf{R}^n$ とする. ある $\varepsilon > 0$ に対して

$$B(a;\varepsilon) \subset M$$

がなりたつとき, a を M の内点という. M の内点全体の集合を M° または M^i と表し, M の内部という.
$\mathbf{R}^n$ の位相を考える場合は, 更に $\mathbf{R}^n$ 自身を全体集合とする. このとき, M の補集合 M^c の内点を M の外点という. M の外点全体の集合を M^e と表し, M の外部という.
M の内点でも外点でもない点を M の境界点という. M の境界点全体の集合を ∂M と表し, M の境界という.
和集合 $M^i \cup \partial M$ を $\overline{M}$ と表し, M の閉包という.

例　M を a を中心とする半径 ε の球体 $B(a;\varepsilon)$ とすると,

$$\begin{aligned}
&M^i = M, \\
&M^e = \{x \in \mathbf{R}^n | d(a,x) > \varepsilon\}, \\
&\partial M = \{x \in \mathbf{R}^n | d(a,x) = \varepsilon\}, \\
&\overline{M} = \{x \in \mathbf{R}^n | d(a,x) \leq \varepsilon\}.
\end{aligned}$$

上の $\overline{M}$ を a を中心とする半径 ε の閉球体という.

上で定義した概念を用いて, 開集合および閉集合を定義しよう.
M を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする. M は $M = M^i$ となるとき $\mathbf{R}^n$ の開集合, $M = \overline{M}$ となるとき $\mathbf{R}^n$ の閉集合という.
$(M^i)^i = M^i$ および $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$ となることが分かるから, M^i は $\mathbf{R}^n$ の開集合で, $\overline{M}$ は $\mathbf{R}^n$ の閉集合である.

例　$\mathbf{R}$ の区間を考える.
開区間 (a,b) は開集合.
ただし, $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ は開集合でもあり, 閉集合でもある.
閉区間 $[a,b]$ は閉集合.
区間 $[a,+\infty), (-\infty, b]$ はともに閉集合である.
その他の区間は開集合でも閉集合でもない.

$\mathbf{R}^n$ の開集合全体の集合を $\mathfrak{O}$ と表すことにする. $\mathfrak{O}$ を $\mathbf{R}^n$ の開集合系という.

定理　次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\mathbf{R}^n, \emptyset \in \mathfrak{O}$.
(2) $O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathfrak{O}$ ならば, $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathfrak{O}$.
(3) $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とすると, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.

一般の集合に対して上の定理の (1)〜(3) のような性質をもつ集合系の元を開集合としたものが, 位相空間である.

問題 12

1. $\mathbf{R}^3$ の 2 点 $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$ に対して $x \times y \in \mathbf{R}^3$ を

$$x \times y = (x_2 y_3 - y_2 x_3, x_3 y_1 - y_3 x_1, x_1 y_2 - y_1 x_2)$$

により定める. このとき, 次の (1), (2) がなりたつことを示せ. なお, $x \times y$ を x と y の外積という.
(1) $x, y \in \mathbf{R}^3$ とすると, $\|x \times y\|^2 = \|x\|^2 \|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2$.
(2) $x, y, z \in \mathbf{R}^3$ とすると, $\langle x \times y, z \rangle = \det \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$. なお, $\langle x \times y, z \rangle$ を x, y, z の 3 重積という.

2. A を n 次の正方行列とすると, $\mathbf{R}^n$ の任意の 2 点 x, y に対して

$$\langle x, yA \rangle = \langle x\,{}^t\!A, y \rangle$$

がなりたつことを示せ.

3. $\mathbf{R}^n$ の開集合の補集合は閉集合で, 閉集合の補集合は開集合であることを示せ.

4. $\mathbf{R}^n$ の閉集合全体の集合を $\mathfrak{A}$ と表すことにすると, 次の (1)〜(3) がなりたつことを示せ.

(1) $\mathbf{R}^n, \emptyset \in \mathfrak{A}$.
(2) $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathfrak{A}$ ならば, $A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k \in \mathfrak{A}$.
(3) $(A_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる集合族とすると, $\displaystyle\bigcap_{\lambda \in \Lambda} A_\lambda \in \mathfrak{A}$.

なお, $\mathfrak{A}$ を $\mathbf{R}^n$ の閉集合系という.

5. M を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とする. M^i は包含関係に関して M に含まれる最大の開集合であることを示せ.

問題 12 の解答

1. (1) x, y を問題文のように表しておくと,

$$\begin{aligned}\|x \times y\|^2 &= \langle x \times y, x \times y \rangle \\ &= (x_2y_3 - y_2x_3)^2 + (x_3y_1 - y_3x_1)^2 + (x_1y_2 - y_1x_2)^2 \\ &= x_2^2y_3^2 - 2x_2x_3y_2y_3 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_1^2 - 2x_3x_1y_3y_1 + x_1^2y_3^2 \\ &\quad + x_1^2y_2^2 - 2x_1x_2y_1y_2 + x_2^2y_1^2.\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}\|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2 &= \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle - \langle x, y \rangle^2 \\ &= (x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)(y_1^2 + y_2^2 + y_3^2) - (x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)^2 \\ &= x_1^2y_1^2 + x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_2^2 + x_2^2y_3^2 \\ &\quad + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 + x_3^2y_3^2 - x_1^2y_1^2 - x_2^2y_2^2 - x_3^2y_3^2 \\ &\quad - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_3x_1y_3y_1 - 2x_2x_3y_2y_3 \\ &= x_1^2y_2^2 + x_1^2y_3^2 + x_2^2y_1^2 + x_2^2y_3^2 + x_3^2y_1^2 + x_3^2y_2^2 \\ &\quad - 2x_1x_2y_1y_2 - 2x_3x_1y_3y_1 - 2x_2x_3y_2y_3.\end{aligned}$$

よって,

$$\|x \times y\|^2 = \|x\|^2\|y\|^2 - \langle x, y \rangle^2.$$

(2) z も x, y と同様に $z = (z_1, z_2, z_3)$ と表しておくと,

$$\begin{aligned}\langle x \times y, z \rangle &= (x_2y_3 - y_2x_3)z_1 + (x_3y_1 - y_3x_1)z_2 + (x_1y_2 - y_1x_2)z_3 \\ &= z_1x_2x_3 - z_1y_2x_3 + y_1z_2x_3 - x_1z_2y_3 + x_1y_2z_3 - y_1x_2z_3 \\ &= \det \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.\end{aligned}$$

2. 標準内積を行列の積を用いて表すと,

$$\begin{aligned}\langle x, yA \rangle &= x^t(yA) \\ &= x({}^tA^ty) \\ &= (x^tA)^ty \\ &= \langle x^tA, y \rangle.\end{aligned}$$

3. M を $\mathbf{R}^n$ の部分集合とすると,

$$\mathbf{R}^n = M^i \cup M^e \cup \partial M$$

で, M^i, M^e, ∂M は互いに交わらないことに注意する.

また, 内部, 外部および境界の定義より,

$$M^i = (M^c)^e,\ M^e = (M^c)^i,\ \partial M = \partial M^c.$$

M が開集合のとき, $M = M^i$ だから,

$$\begin{aligned} M^c &= M^e \cup \partial M \\ &= (M^c)^i \cup \partial M^c \\ &= \overline{M^c}. \end{aligned}$$

よって, M^c は閉集合.
M が閉集合のとき, $M = \overline{M}$ だから,

$$\begin{aligned} M^c &= M^e \\ &= (M^c)^i. \end{aligned}$$

よって, M^c は開集合.

4. $\mathfrak{O}$ を $\mathbf{R}^n$ の開集合系とする.
まず,

$$(\mathbf{R}^n)^c = \emptyset \in \mathfrak{O}.$$

また,

$$(\emptyset)^c = \mathbf{R}^n \in \mathfrak{O}.$$

よって, (1) がなりたつ.
次に, $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathfrak{A}$ とすると,

$$A_1^c, A_2^c, \ldots, A_k^c \in \mathfrak{O}.$$

よって, de Morgan の法則より,

$$(A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \cdots \cap A_k^c \in \mathfrak{O}.$$

したがって, (2) がなりたつ.
更に, $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる集合族とすると, $(A_\lambda^c)_{\lambda\in\Lambda}$ は $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族.
よって, de Morgan の法則より,

$$\left(\bigcap_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda\right)^c = \bigcup_{\lambda\in\Lambda} A_\lambda^c \in \mathfrak{O}.$$

したがって, (3) がなりたつ.

5. O を M に含まれる開集合とすると,

$$\begin{aligned} O &= O^i \\ &\subset M^i \\ &= M. \end{aligned}$$

M^i は開集合だから, M^i は包含関係に関して M に含まれる最大の開集合.