§3. Riemann 多様体

Riemann 多様体とは各接空間に内積があたえられている多様体である．ここでも C^∞ 級のもののみを考えることにする．

定義　M を C^∞ 級多様体とする．各 $p \in M$ において T_pM の内積

$$g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbf{R}$$

があたえられているとし, p から g_p への対応を g と表す．任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して, p から $g_p(X_p, Y_p)$ への対応が M 上の C^∞ 級関数を定めるとき, g を M の Riemann 計量という．このとき, 組 (M, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体という．

Riemann 計量は座標近傍を用いて表すことができる．その前に線形代数から次の言葉を準備しておこう．

定義　A を n 次実対称行列とする．任意の $x \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ に対して

$$xA^tx > 0$$

となるとき, A は正定値であるという．

実対称行列は直交行列によって対角化可能で, 固有値はすべて実数であるから, 次がなりたつ．

定理　A を実対称行列とする．A が正定値であるための必要十分条件は A の固有値がすべて正であること．

(M, g) を n 次元 C^∞ 級 Riemann 多様体とし, $p \in M$, $u, v \in T_pM$ とする．
(U, φ) を $p \in U$ となる座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n),$$

$$u = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \ v = \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p$$

と表しておく．
このとき,

$$\begin{aligned} g_p(u, v) &= g_p\left(\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \sum_{j=1}^n b_j \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right) \\ &= \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right). \end{aligned}$$

ここで,

$$g_{ij} = g_p\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_j}\right)_p\right)$$

とおくと,

$$g_p(u, v) = \sum_{i,j=1}^n a_i b_j g_{ij}.$$

g_p は T_pM の内積だから, n 次の正方行列 (g_{ij}) は正定値実対称行列である．

M 上の C^∞ 級曲線

$$\gamma : [a, b] \to M$$

に対して, 積分

$$\int_a^b \sqrt{g_{\gamma(t)}(\gamma'(t), \gamma'(t))}dt$$

を γ の長さという.
内積はベクトル空間上の正定値 2 次対称形式と言い替えることができる. このことと曲線の長さの定義から, 上の Riemann 計量 g を

$$ds^2 = \sum_{i,j=1}^{n} g_{ij} dx_i \otimes dx_j$$

と表すこともある. $\otimes$ は省略することもある.

例 (Euclid 空間)
$\mathbf{R}^n$ は C^∞ 級多様体であるが, そもそも標準内積という内積をもつベクトル空間であった.
$p \in \mathbf{R}^n$ とし, $T_p\mathbf{R}^n$ を $\mathbf{R}^n$ と自然に同一視しておく.
このとき, 標準内積を用いることにより, $\mathbf{R}^n$ は C^∞ 級 Riemann 多様体となる.
$\mathbf{R}^n$ の Riemann 計量は

$$ds^2 = \sum_{i=1}^{n} (dx_i)^2$$

と表すことができる.
Riemann 多様体 $\mathbf{R}^n$ 上の曲線の長さは微分積分において扱う曲線の長さに他ならない.

例 (第一基本形式)
$\mathbf{R}^2$ の領域 D からの C^∞ 級写像として表される径数付き曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

を考えよう. このとき, p の像 $p(D)$ は 2 次元 C^∞ 級多様体となる.
$(u_0, v_0) \in D$ を固定しておき, Π を $p(u_0, v_0)$ における p の接平面とすると,

$$\Pi = \{p(u_0, v_0) + p_u(u_0, v_0)(u - u_0) + p_v(u_0, v_0)(v - v_0) | (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と具体的に表すことができる. Π は 3 次元ベクトル空間 $\mathbf{R}^3$ の 2 次元部分空間

$$\{p_u(u_0, v_0)u + p_v(u_0, v_0)v | (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

と同一視することができる. 以下ではこの部分空間も Π と表すことにする.
$\mathbf{R}^3$ の標準内積を用いて,

$$p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \in \Pi \quad ((u_1, v_1), (u_2, v_2) \in \mathbf{R}^2)$$

に対して

$$\langle p_u(u_0, v_0)u_1 + p_v(u_0, v_0)v_1, p_u(u_0, v_0)u_2 + p_v(u_0, v_0)v_2 \rangle \in \mathbf{R}$$

を対応させる. $p_u(u_0, v_0), p_v(u_0, v_0)$ は 1 次独立であるから, この対応は Π の内積を定め, $p(D)$ は Riemann 多様体となる.

D で定義された関数 E, F, G を

$$E = \langle p_u, p_u \rangle,\ F = \langle p_u, p_v \rangle,\ G = \langle p_v, p_v \rangle$$

により定めると, Riemann 計量は

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

と表すことができる. これは曲面 p の第一基本形式である.

例　M を C^∞ 級多様体, g, h をともに M の Riemann 計量とする.
$p \in M$ に対して

$$(g+h)_p(u,v) = g_p(u,v) + h_p(u,v) \quad (u, v \in T_pM)$$

とおくと, $g+h$ は M の Riemann 計量を定める.
また, φ を正の値をとる M 上の C^∞ 級関数とし,

$$(\varphi g)_p(u,v) = \varphi(p) g_p(u,v) \quad (u, v \in T_pM)$$

とおくと, φg は M の Riemann 計量を定める. φg は g に共形的であるという.

例 (Riemann 直積)
M, N を C^∞ 級多様体, $M \times N$ を M と N の直積多様体とする. このとき, $M \times N$ から M への自然な射影 π_M および $M \times N$ から N への自然な射影 π_N は C^∞ 級写像となる.
$(p,q) \in M \times N$ に対して, 線形写像

$$(d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)} : T_{(p,q)}(M \times N) \to T_pM \times T_qN$$

を

$$\left((d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)}\right)(v) = \left((d\pi_M)_{(p,q)}(v), (d\pi_N)_{(p,q)}(v)\right) \quad (v \in T_{(p,q)}(M \times N))$$

により定めることができる. このとき, $(d\pi_M)_{(p,q)} \times (d\pi_N)_{(p,q)}$ は線形同型写像となることが分かる. この線形同型写像により, $T_{(p,q)}(M \times N)$ を $T_pM \times T_qN$ と同一視する.
g を M の Riemann 計量, h を N の Riemann 計量とし,

$$(g \times h)_{(p,q)}((u_1,u_2),(v_1,v_2)) = g_p(u_1,v_1) + h_q(u_2,v_2) \quad ((u_1,u_2),(v_1,v_2) \in T_pM \times T_qN)$$

とおく. このとき, 上の同一視により, $g \times h$ は $M \times N$ の Riemann 計量となる. $(M \times N, g \times h)$ を (M,g) と (N,h) の Riemann 直積という.

関連事項 1 においてパラコンパクト多様体について触れたが, パラコンパクト多様体に対しては 1 の分割を用いることにより, Riemann 計量の存在を示すことができる.

定義　M を C^∞ 級多様体, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ を M の開被覆とする. M 上の C^∞ 級関数の族 $\{f_i\}_{i \in \mathbf{N}}$ で, 次の (1)〜(3) をみたすものを $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に従属する 1 の分割という.

(1) 任意の $i \in \mathbf{N}$ および任意の $p \in M$ に対して $0 \leq f_i(p) \leq 1$.

(2) $\{\mathrm{supp}\,(f_i)\}_{i \in \mathbf{N}}$ は M の局所有限な被覆で, $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ の細分.

(3) 任意の p に対して $\sum_{i=1}^{\infty} f_i(p) = 1$.

定理　パラコンパクト多様体の任意の開被覆に対して, その開被覆に従属する 1 の分割が存在する.

パラコンパクト多様体上の Riemann 計量の存在を示すには, 局所的に構成した Riemann 計量を 1 の分割を用いて, 上の 3 つめの例のように足し合わせればよい.

関連事項 3. Schwarz の提灯

曲線の長さとはそもそも曲線上に分点を取ることによって曲線を折れ線で近似し, 更に分点を増やして折れ線の長さの和の極限を考えることによって得られるものである.
上の考え方を 2 変数関数 $f(x,y)$ のグラフとして表される曲面 $z=f(x,y)$ に適用したらどうであろうか. 実は, 曲面を内接する多角形で近似すると, 面積の和の極限が存在しない場合があることが Schwarz の提灯という例によって知られている.
まず, 半径 r, 高さ h の円柱を考えよう. 良く知られているように, この円柱の側面積は $2\pi rh$ である. 次に, 円柱の高さを m 等分し, そのときに得られた円周上の点を n 等分する. 更に, 得られた等分点を 1 つおきに半分ずつずらす. このとき, 円柱に内接する多面体が得られる. これが Schwarz の提灯である. Schwarz の提灯は 1 つ 1 つの面は互いに合同な $2mn$ 個の二等辺三角形である.
Schwarz の提灯の面積は容易に求めることができる. まず, 1 つ 1 つの二等辺三角形の底辺の長さは $2r\sin\dfrac{\pi}{n}$ で, その高さは三平方の定理を用いると,

$$\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2+\left(r-r\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}$$

である. よって, Schwarz の提灯の面積を S とおくと,

$$\begin{aligned}S&=2mn\cdot\frac{1}{2}\cdot 2r\left(\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{\left(\frac{h}{m}\right)^2+\left(r-r\cos\frac{\pi}{n}\right)^2}\\&=(2\pi rh)\left(\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)\sqrt{1+\left(\frac{2mr}{h}\sin^2\frac{\pi}{2n}\right)^2}\end{aligned}$$

である.
m と n が大きくなるとき, Schwarz の提灯は円柱の側面に「近づいていく」. しかし, S の値は必ずしも円の側面積へ収束する訳ではない. 実際,

$$\lim_{m,n\to\infty}S=\begin{cases}2\pi rh & (m=n),\\ 2\pi rh\sqrt{1+\dfrac{\pi^4r^2}{4h^2}} & (m=n^2),\\ +\infty & (m=n^3)\end{cases}$$

である. $m=n^3$ のときは, m,n が大きくなるにつれて Schwarz の提灯の各面は底面と平行になっていくことにも注意しておこう. すなわち, 上のような近似は単位法ベクトルに関していえば, まったく近似になっていないのである.
多変数の微分積分においても学ぶように, 曲面の面積は外接するような多面体で考えると上手くいく.
第一基本形式を

$$Edu^2+2Fdudv+Gdv^2$$

とする曲面の面積要素は $\sqrt{EG-F^2}dudv$ であたえられ, 曲面積はこれを積分すればよい.
2 つの空間ベクトル a,b を 2 辺とする平行四辺形の面積は

$$\|a\times b\|=\sqrt{\|a\|^2\|b\|^2-\langle a,b\rangle^2}$$

であることを思い出そう.