§7. アファイン接続

§6 において扱った Levi-Civita 接続はアファイン接続というものへ一般化することができる.

定義 M を C^∞ 級多様体とする. ∇ を $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$ を対応させる写像

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$$

とする. 任意の $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$ と任意の $f \in C^\infty(M)$ に対して次の (1)〜(4) がなりたつとき, ∇ を M のアファイン接続という. また, $\nabla_Y X$ を X の Y に関する共変微分という.

$$\begin{aligned}
&(1)\ \nabla_{Y+Z} X = \nabla_Y X + \nabla_Z X. \\
&(2)\ \nabla_{fY} X = f \nabla_Y X. \\
&(3)\ \nabla_Z (X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y. \\
&(4)\ \nabla_Y (fX) = (Yf)X + f \nabla_Y X.
\end{aligned}$$

なお, (2) より, 各 $p \in M$ において ∇X は T_pM の線形変換を定めることが分かる. よって, $v \in T_pM$ に対して $\nabla_v X \in T_pM$ を定めることができる.
M を C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続とする.
$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $T(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)$ を

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

により定める.
ここで, $f, g \in C^\infty(M)$ とすると,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

がなりたつ. 特に, $g = 1$ とし, (2), (4) を用いると,

$$\begin{aligned}
T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\
&= f \nabla_X Y - \{(Yf)X + f \nabla_Y X\} - \{f[X, Y] - (Yf)X\} \\
&= fT(X, Y).
\end{aligned}$$

同様に,

$$T(X, fY) = fT(X, Y).$$

これらのことより, T は各 $p \in M$ において双線形写像

$$T_p : T_pM \times T_pM \to T_pM$$

を定めることが分かる. このことを T は $(1, 2)$ 型のテンソル場であるという.
また, T は交代的, すなわち

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

をみたす. T を捩率テンソル場または単に捩率という. $T = 0$ となるとき, ∇ は捩れがないなどという.
§6 において扱った Levi-Civita 接続は次のように特徴付けることができる.

定理 (M, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体とする. このとき, g に関して計量的で捩れのない M のアファイン接続が一意的に存在する.

上の定理に現れたアファイン接続が Riemann 多様体の Levi-Civita 接続である.
次に, 共変微分を座標近傍を用いて表してみよう.
M を n 次元 C^∞ 級多様体, ∇ を M のアファイン接続, (U, φ) を M の座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておく.
このとき, ∇ は U 上で

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^{n} \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \tag{$*$}$$

と表すことができる. ただし, Γ_{ij}^k $(i, j, k = 1, 2, \ldots, n)$ は U 上で定義された C^∞ 級関数である. Γ_{ij}^k を Christoffel の記号という.

定理 ∇ が捩れのないアファイン接続ならば, 任意の $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

証明 $i, j = 1, 2, \ldots, n$ とすると, 仮定より,

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \left[\frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \sum_{k=1}^{n} \left(\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k \right) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

よって, 任意の $k = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0.$$

□

§5 において現れた Γ_{ij}^k は Riemann 多様体の Levi-Civita 接続に対する Christoffel の記号である.

例 (M, g) を n 次元 C^∞ 級 Riemann 多様体, ∇ を M の Levi-Civita 接続とし, 上のように座標近傍を選んでおく.
∇ は計量的だから, $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$ とし, $(*)$ を用いると,

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) &= g\left(\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= g\left(\sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + g\left(\frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right). \end{aligned}$$

よって, $g_{ij} = g\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}, \dfrac{\partial}{\partial x_j} \right)$ とおくと,

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l g_{jl}.$$

(g_{ij}) は正定値実対称行列に値をとり, ∇ は捩れをもたないから, 上の定理より,

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ik}^l g_{jl} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{jk}^l g_{li} + \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ji}^l g_{kl} - \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= 2 \sum_{l=1}^{n} \Gamma_{ij}^l g_{lk}. \end{aligned}$$

(g^{ij}) を (g_{ij}) の逆行列とし, $m = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} g^{km}\left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k}\right) &= 2\sum_{k=1}^{n} g^{km}\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l} g_{lk} \\ &= 2\sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l} g_{lk} g^{km} \\ &= 2\sum_{l=1}^{n}\Gamma_{ij}^{l}\delta_{lm} \\ &= 2\Gamma_{ij}^{m}.\end{aligned}$$

ただし, δ_{lm} は Kronecker の δ である.
したがって, m を k, k を l と置き替えると,

$$\Gamma_{ij}^{k} = \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{n} g^{lk}\left(\frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l}\right).$$

これは §5 において現れた式である.

§5 においては Christoffel の記号とともに $\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\dfrac{d\gamma}{dt}$ というものも現れた. これは曲線に沿う共変微分というものである.
M を n 次元 C^{∞} 級多様体とし,

$$\gamma : I \to M$$

を M 上の C^{∞} 級曲線とする.
ここで, 各 $t \in I$ に対して $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$ が定められているとする. この対応を γ に沿うベクトル場という.
(U, φ) を $\gamma(t) \in U$ となる M の座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくと,

$$X(t) = \sum_{i=1}^{n}\xi_i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)}$$

と表すことができる. 各 $\xi_i(t)$ が C^{∞} 級関数のとき, X は C^{∞} 級であるという.
∇ を M のアファイン接続とする. このとき, X の γ に沿う共変微分 $\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}X(t)$ は

$$\begin{aligned}\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}X(t) &= \nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}\sum_{i=1}^{n}\xi_i(t)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)} \\ &= \sum_{i=1}^{n}\frac{d\xi_i(t)}{dt}\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_{\gamma(t)} + \sum_{i=1}^{n}\xi_i(t)\nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}\frac{\partial}{\partial x_i}\end{aligned}$$

と計算していく. 接続の定義に現れた (1)〜(4) の性質と同様の規則に従って計算するとともに, $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対しては

$$\nabla^{\gamma}_{\frac{d}{dt}}X_{\gamma(t)} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}}X$$

がなりたつものとして特徴付けられるのである.

関連事項 7. テンソル場

多様体上のベクトル場, 微分形式, Riemann 計量やアファイン接続の捩率はテンソル場というものの例である.
まず, ベクトル空間上のテンソルについて述べよう.
V を n 次元実ベクトル空間, V^* を V の双対空間とする. V の s 個の直積と V^* の r 個の直積の上の多重線形写像

$$F : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_{s\text{ 個}} \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_{r\text{ 個}} \to \mathbf{R}$$

を (r, s) 型のテンソルという.
V 上の (r, s) 型テンソル全体の空間を $T^r_s(V)$ と表すことにすると, $T^r_s(V)$ は自然に実ベクトル空間となる. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の基底, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の双対基底とし, $i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$\begin{aligned}
&(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s})(v_{k_1}, v_{k_2}, \ldots, v_{k_s}, f_{l_1}, f_{l_2}, \ldots, f_{l_r}) \\
&= f_{j_1}(v_{k_1}) f_{j_2}(v_{k_2}) \cdots f_{j_s}(v_{k_s}) f_{l_1}(v_{i_1}) f_{l_2}(v_{i_2}) \cdots f_{l_r}(v_{i_r}) \\
&= \begin{cases} 1 & (k_1 = j_1,\ k_2 = j_2,\ \ldots,\ k_s = j_s,\ l_1 = i_1,\ l_2 = i_2,\ \ldots,\ l_r = i_r), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
\end{aligned}$$

とおくと, $\{v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}\}_{i_1, i_2, \ldots, i_r, j_1, j_2, \ldots, j_s = 1, 2, \ldots, n}$ は $T^r_s(V)$ の基底となる. 特に, $T^r_s(V)$ の次元は n^{r+s} である. また, $T^r_s(V)$ は

$$T^r_s(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_{r\text{ 個}} \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{s\text{ 個}}$$

とも表される. 更に, $T^r_s(V)$ は $T^s_0(V)$ から $T^r_0(V)$ への線形写像全体の空間と同一視することができる. 実際, $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}$ に対して

$$\begin{aligned}
&(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s})(v_{k_1} \otimes v_{k_2} \otimes \cdots \otimes v_{k_s}) \\
&= f_{j_1}(v_{k_1}) f_{j_2}(v_{k_2}) \cdots f_{j_s}(v_{k_s})(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}) \\
&= \begin{cases} v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} & (k_1 = j_1,\ k_2 = j_2,\ \ldots,\ k_s = j_s), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases}
\end{aligned}$$

を対応させることにより定まる線形写像を考えればよい.
さて, M を C^∞ 級多様体とする. 各 $p \in M$ に対して $K_p \in T^r_s(T_pM)$ があたえられているとき, この対応を K と表し, M 上の (r, s) 型のテンソル場という. 座標近傍を用いて表すことにより, 多様体上のテンソル場の微分可能性を定義することができる.
ベクトル場は $(1, 0)$ 型のテンソル場に他ならない.
k 次微分形式は $(0, k)$ 型のテンソル場に交代性の条件を付け加えたものである.
Riemann 計量は $(0, 2)$ 型のテンソル場に正定値対称性の条件を付け加えたものである.