§8. 誘導接続

§7 の後半において述べた曲線に沿う共変微分を一般化しよう.
M, N を C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像とする.
ここで, 各 $p \in M$ に対して $\xi(p) \in T_{f(p)}N$ が定められているとする. この対応を ξ と表し, f に沿うベクトル場という.
(V, ψ) を $f(p) \in V$ となる N の座標近傍とし,

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておくと,

$$\xi(p) = \sum_{\alpha=1}^{n} \xi_\alpha(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha} \right)_{f(p)}$$

と表すことができる. 各 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ が C^∞ 級関数のとき, ξ は C^∞ 級であるという.
以下では f に沿う C^∞ 級のベクトル場を考え, これら全体の集合を $\mathfrak{X}_f(M, N)$ と表すことにする.

例　M, N を C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像とし, $X \in \mathfrak{X}(M)$ とする.
各 $p \in M$ に対して $(f_*X)(p) \in T_{f(p)}N$ を

$$(f_*X)(p) = (df)_p(X_p)$$

により定める. このとき, $f_*X \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ となる.
また, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ とし, 各 $p \in M$ に対して $(Y \circ f)(p) \in T_{f(p)}N$ を

$$(Y \circ f)(p) = Y_{f(p)}$$

により定める. このとき, $Y \circ f \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ となる.

写像の値域の多様体にアファイン接続があたえられていると, 写像に沿う共変微分を定めることができる. すなわち, 写像に沿うベクトル場を写像の定義域上のベクトル場で共変微分することができる.

定理　M, N を C^∞ 級多様体, ∇ を N のアファイン接続, f を M から N への C^∞ 級写像とする. このとき, 任意の $\xi \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ と任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ に対して $\nabla^f_X \xi \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ を対応させる写像

$$\nabla^f : \mathfrak{X}_f(M, N) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}_f(M, N)$$

で次の (1)〜(5) をみたすものが一意的に存在する. ただし, $\xi, \xi_1, \xi_2 \in \mathfrak{X}_f(M, N)$, $X, X_1, X_2 \in \mathfrak{X}(M)$, $\lambda \in C^\infty(M)$, $Y \in \mathfrak{X}(N)$ である.

(1) $\nabla^f_{X_1+X_2}\xi = \nabla^f_{X_1}\xi + \nabla^f_{X_2}\xi$.
(2) $\nabla^f_{\lambda X}\xi = \lambda \nabla^f_X \xi$.
(3) $\nabla^f_X(\xi_1 + \xi_2) = \nabla^f_X \xi_1 + \nabla^f_X \xi_2$.
(4) $\nabla^f_X(\lambda\xi) = (X\lambda)\xi + \lambda \nabla^f_X \xi$.
(5) $\nabla^f_X(Y \circ f) = \nabla_{f_*X} Y$.

∇^f を f による ∇ の誘導接続という.
なお, (2) より, 各 $p \in M$ において $\nabla^f \xi$ は T_pM から $T_{f(p)}N$ への線形写像を定めることが分かる. よって, $v \in T_pM$ に対して $\nabla^f_v \xi \in T_{f(p)}N$ を定めることができる.

次に, 写像に沿う共変微分を座標近傍を用いて表してみよう.
M を m 次元 C^∞ 級多様体, N を n 次元 C^∞ 級多様体, f を M から N への C^∞ 級写像, ∇ を N のアファイン接続とする.
$p \in M$ に対して, (U, φ) を $p \in U$ となる M の座標近傍, (V, ψ) を $f(p) \in V$ となる N の座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_m),\ \psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n),\ f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

と表しておく. また, $\Gamma^\gamma_{\alpha\beta}$ を (V, ψ) に関する Christoffel の記号とする.
ここで, $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\xi \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ とすると, X, ξ はそれぞれ

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X_i(p) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\ \xi(p) = \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha(p) \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)}$$

と表すことができる.
よって, (1)〜(4) より,

$$\begin{aligned}
\nabla^f_X \xi &= \nabla^f_{\sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i}} \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^n X_i \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \xi_\alpha \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)} \\
&= \sum_{i=1}^m \sum_{\alpha=1}^n X_i \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)} + \xi_\alpha \nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)}\right).
\end{aligned}$$

ここで, (5) より,

$$\begin{aligned}
\nabla^f_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)} &= \nabla_{f_*\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \nabla_{\sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(p)}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \nabla_{\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(p)}} \frac{\partial}{\partial y_\alpha} \\
&= \sum_{\beta=1}^n \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \sum_{\gamma=1}^n \left(\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \circ f\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(p)}.
\end{aligned}$$

したがって,

$$\nabla^f_X \xi = \sum_{i=1}^m \sum_{\gamma=1}^n X_i \left(\frac{\partial \xi_\gamma}{\partial x_i} + \sum_{\alpha,\beta=1}^n \xi_\alpha \frac{\partial f_\beta}{\partial x_i} \left(\Gamma^\gamma_{\beta\alpha} \circ f\right)\right) \left(\frac{\partial}{\partial y_\gamma}\right)_{f(p)}. \qquad (*)$$

M を C^∞ 級多様体, (N, g) を C^∞ 級 Riemann 多様体, f を M から N への C^∞ 級写像とし, 写像

$$g_f : \mathfrak{X}_f(M, N) \times \mathfrak{X}_f(M, N) \to C^\infty(M)$$

を

$$g_f(\xi, \eta)(p) = g_{f(p)}(\xi(p), \eta(p)) \quad (\xi, \eta \in \mathfrak{X}_f(M, N),\ p \in M)$$

により定める.

このとき, 次がなりたつ.

定理　∇ を g に関して計量的な N の接続とする. このとき, 任意の $X \in \mathfrak{X}(M)$ と任意の $\xi, \eta \in \mathfrak{X}_f(M, N)$ に対して

$$X\left(g_f(\xi, \eta)\right) = g_f\left(\nabla^f_X \xi, \eta\right) + g_f\left(\xi, \nabla^f_X \eta\right).$$

証明　上と同様に, 座標近傍を用いて X, ξ, η をそれぞれ

$$X(p) = \sum_{i=1}^m X_i(p)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p,\ \xi(p) = \sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)},\ \eta(p) = \sum_{\alpha=1}^n \eta_\alpha(p)\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)}$$

と表しておく.
また, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$ に対して

$$g_{\alpha\beta} = g\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)$$

とおく.
∇ は g に関して計量的だから, $\gamma = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y_\gamma} = \sum_{\delta=1}^n \Gamma^\delta_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta} + \sum_{\delta=1}^n \Gamma^\delta_{\gamma\beta} g_{\alpha\delta}.$$

よって,

$$\begin{aligned}
X\left(g_f(\xi, \eta)\right) &= \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i} g_f\left(\sum_{\alpha=1}^n \xi_\alpha\left(\frac{\partial}{\partial y_\alpha}\right)_{f(p)}, \sum_{\beta=1}^n \eta_\beta\left(\frac{\partial}{\partial y_\beta}\right)_{f(p)}\right) \\
&= \sum_{i=1}^m X_i \frac{\partial}{\partial x_i} \sum_{\alpha,\beta=1}^n \xi_\alpha \eta_\beta (g_{\alpha\beta} \circ f) \\
&= \sum_{i=1}^m X_i \sum_{\alpha,\beta=1}^n \left(\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i}\eta_\beta(g_{\alpha\beta} \circ f) + \xi_\alpha \frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_i}(g_{\alpha\beta} \circ f) + \xi_\alpha \eta_\beta \sum_{\gamma=1}^n \frac{\partial g_{\alpha\beta}}{\partial y_\gamma}\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}\right) \\
&= \sum_{i=1}^m X_i \sum_{\alpha,\beta=1}^n \left\{\frac{\partial \xi_\alpha}{\partial x_i}\eta_\beta(g_{\alpha\beta} \circ f) + \xi_\alpha \frac{\partial \eta_\beta}{\partial x_i}(g_{\alpha\beta} \circ f)\right. \\
&\quad \left. + \xi_\alpha \eta_\beta \sum_{\gamma,\delta=1}^n \left(\Gamma^\delta_{\gamma\alpha} g_{\delta\beta} + \Gamma^\delta_{\gamma\beta} g_{\alpha\delta}\right)\frac{\partial f_\gamma}{\partial x_i}\right\}.
\end{aligned}$$

更に, $(*)$ を用いて計算すればよい. □

また, T を ∇ の捩率とすると, 次がなりたつ.

定理　$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ とすると,

$$\nabla^f_X f_* Y - \nabla^f_Y f_* X - f_*[X, Y] = T(f_* X, f_* Y).$$

証明　座標近傍を用いて, 直接計算すればよい. □

関連事項 8. アファインはめ込み

アファイン接続をもつ多様体の間の写像に関して, アファインはめ込みというものを考えることができる.
M を m 次元 C^∞ 級多様体, N を n 次元 C^∞ 級多様体, f を M から N へのはめ込みとする. ただし, $n > m$ であるとする.
更に, 各 $p \in M$ に対して直和分解

$$T_{f(p)}N = (df)_p(T_pM) \oplus D_p$$

があたえられているとする. ただし, p から D_p への対応は C^∞ 級であるとする. すなわち, $f(p)$ を含む開近傍で C^∞ 級のベクトル場 $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_{n-m}$ が存在し, p の近くの点 q において

$$\left\{(\xi_1)_{f(q)}, (\xi_2)_{f(q)}, \ldots, (\xi_{n-m})_{f(q)}\right\}$$

は D_q の基底となる.
ここで, ∇^M, ∇^N をそれぞれ M, N の捩れのないアファイン接続とし, f による ∇^N の誘導接続を $\nabla^{N,f}$ と表すことにする. 上の直和分解を用いて, 任意の $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ に対して

$$\nabla^{N,f}_Y(f_*X) = f_*\left(\nabla^M_Y X\right) + \alpha(X, Y)$$

と表されるとき, f をアファインはめ込みという.
なお, ∇^M, ∇^N はともに捩れがないから, $\alpha(X, Y)$ は X, Y に関して対称である. 実際, ∇^M の捩れがないから

$$\nabla^M_X Y - \nabla^M_Y X = [X, Y],$$

∇^N の捩れがないから

$$\nabla^{N,f}_X f_*Y - \nabla^{N,f}_Y f_*X = f_*[X, Y]$$

で,

$$\begin{aligned}\alpha(X, Y) - \alpha(Y, X) &= \nabla^{N,f}_Y(f_*X) - f_*\left(\nabla^M_Y X\right) - \left(\nabla^{N,f}_X(f_*Y) - f_*\left(\nabla^M_X Y\right)\right)\\ &= -f_*[X, Y] + f_*[X, Y]\\ &= 0\end{aligned}$$

となるからである. α をアファイン基本形式という.
N が Riemann 多様体のときは, Riemann 計量を用いて上のような直和分解を定めることができる. すなわち, g を N の Riemann 計量とするとき,

$$D_p = \{w \in T_{f(p)}N \mid \text{任意の } v \in T_pM \text{ に対して } g_{f(p)}\left(w, (df)_p(v)\right) = 0\}$$

とおくのである. このときの α は第二基本形式という. §6 において扱ったことを思い出そう.
M にアファイン接続があたえられていなくても, N にアファイン接続があたえられていれば, 上のような性質をもつ M のアファイン接続を定めることができる. この接続をアファインはめ込みによる誘導接続という.