§11. ベクトル束の例

§10 においてベクトル束の例として接ベクトル束を挙げたが, ここではその他の基本的な例について述べていこう.

例 (直積束)
M を C^∞ 級多様体とすると, 直積多様体 $M \times \mathbf{R}^r$ は M 上の階数 r のベクトル束となる.
もちろん, 射影 π は $M \times \mathbf{R}^r$ から M への自然な射影である.
このとき, $M \times \mathbf{R}^r$ を直積束という. 直積束のことを自明束ということもある.
$M \times \mathbf{R}^r$ の切断とは M から $\mathbf{R}^r$ への C^∞ 級写像に他ならない.

例 (余接ベクトル束)
M を n 次元 C^∞ 級多様体とし,

$$T^*M = \{(p, \omega) | p \in M,\ \omega \in T_p^*M\}$$

とおく.
$(p, \omega) \in T^*M$ に対して (U, φ) を $p \in U$ となる M の座標近傍とする. このとき, ω は

$$\omega = \sum_{i=1}^{n} a_i (dx_i)_p \quad (a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R})$$

と表すことができる.
ここで,

$$V = \bigcup_{p \in U} \left(\{p\} \times T_p^*M\right)$$

とおき, 写像

$$\psi : V \to \mathbf{R}^n \times \mathbf{R}^n$$

を

$$\psi(p, \omega) = (\varphi(p), a_1, a_2, \ldots, a_n)$$

により定める.
このとき, 上のような (V, ψ) 全体は T^*M の C^∞ 級座標近傍系となることが分かり, T^*M は C^∞ 級多様体となる.
更に, T^*M は M 上の階数 n のベクトル束となる. 射影 π は T^*M から M への自然な射影である. T^*M を M の余接ベクトル束という.
$(U_\alpha, \varphi_\alpha), (U_\beta, \varphi_\beta)$ を $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる M の座標近傍とし,

$$\varphi_\alpha = (x_1, x_2, \ldots, x_n),\ \varphi_\beta = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておく.
このとき, 変換関数 $\varphi_{\alpha\beta}$ は行列で表すと

$$\begin{pmatrix} \dfrac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dfrac{\partial y_2}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_2}{\partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_2} & \cdots & \dfrac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}$$

で, これは §10 において計算した TM の変換関数の転置の逆行列であることが分かる.
また, T^*M の切断は M 上の C^∞ 級 1 次微分形式に他ならない.

一般に, 幾つかのベクトル空間があたえられていると, それに伴って新しいベクトル空間を構成することができる. この構成を各ファイバーに対して行うことにより, 幾つかのベクトル束から新しいベクトル束を構成することができる.

例 (直和束)
まず, U, U', V, V' を実ベクトル空間, f を U から U' への線形写像, g を V から V' への線形写像とする.
このとき, U と V の直和 $U \oplus V$ から U' と V' の直和 $U' \oplus V'$ への線形写像 $f \oplus g$ を

$$(f \oplus g)(u, v) = (f(u), g(v)) \quad (u \in U,\ v \in V)$$

により定めることができる.
さて, M を C^∞ 級多様体, E, F をともに M 上のベクトル束とする.
このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを $E_p \oplus F_p$ とするベクトル束を考えることができる.
これを $E \oplus F$ と表し, E と F の Whitney 和または直和束という.
$E \oplus F$ の階数は E の階数と F の階数の和である.
また, E, F の変換関数が M の同じ開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対してそれぞれ $\{\varphi_{\alpha\beta}\}, \{\psi_{\alpha\beta}\}$ であるとき, $E \oplus F$ の変換関数は $\{\varphi_{\alpha\beta} \oplus \psi_{\alpha\beta}\}$ と表される.

例 (テンソル積束)
まず, U, V を実ベクトル空間とする.
$u \in U$ および $v \in V$ を用いて $u \otimes v$ と表されるものから生成され, $u, u_1, u_2 \in U$, $v, v_1, v_2 \in V$, $c \in \mathbf{R}$ に対して次の (1)〜(4) がなりたつような実ベクトル空間を $U \otimes V$ と表し, U と V のテンソル積という.

$$\begin{aligned}
&(1)\ (u_1 + u_2) \otimes v = u_1 \otimes v + u_2 \otimes v.\\
&(2)\ u \otimes (v_1 + v_2) = u \otimes v_1 + u \otimes v_2.\\
&(3)\ (cu) \otimes v = c(u \otimes v).\\
&(4)\ u \otimes (cv) = c(u \otimes v).
\end{aligned}$$

$\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}$ を U の基底, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の基底とすると, $\{u_i \otimes v_j\}_{1 \le i \le m, 1 \le j \le n}$ は $U \otimes V$ の基底となる. 特に, $U \otimes V$ の次元は U の次元と V の次元の積である.
また, U, U', V, V' を実ベクトル空間, f を U から U' への線形写像, g を V から V' への線形写像とする.
このとき, $U \otimes V$ から $U' \otimes V'$ への線形写像 $f \otimes g$ を

$$(f \otimes g)(u \otimes v) = f(u) \otimes g(v) \quad (u \in U,\ v \in V)$$

により定めることができる.
さて, M を C^∞ 級多様体, E, F をともに M 上のベクトル束とする.
このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを $E_p \otimes F_p$ とするベクトル束を考えることができる.
これを $E \otimes F$ と表し, E と F のテンソル積束という.
$E \otimes F$ の階数は E の階数と F の階数の積である.
また, E, F の変換関数が M の同じ開被覆 $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ に対してそれぞれ $\{\varphi_{\alpha\beta}\}, \{\psi_{\alpha\beta}\}$ であるとき, $E \otimes F$ の変換関数は $\{\varphi_{\alpha\beta} \otimes \psi_{\alpha\beta}\}$ と表される.

例 (双対束)
M を C^∞ 級多様体, E を M 上のベクトル束とする.
このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを E_p の双対空間 E_p^* とするベクトル束を考えることができる.
これを E^* と表し, E の双対束という.
E の変換関数がある基底に関して行列を用いて $\{\varphi_{\alpha\beta}\}$ と表されるとき, E^* の変換関数は双対基底を選んでおけば $\{{}^t\varphi_{\alpha\beta}^{-1}\}$ となることが分かる.
例えば, TM の双対束は T^*M である.

例 (準同型束)
まず, U, V を実ベクトル空間とする.
このとき, U から V への線形写像全体の空間を $\mathrm{Hom}\,(U, V)$ と表すと, $\mathrm{Hom}\,(U, V)$ は自然に実ベクトル空間となる.
また, $f \in U^*$ および $v \in V$ に対して $\mathrm{Hom}\,(U, V)$ の元を

$$f(u)v \quad (u \in U)$$

により定めると, この対応は $U^* \otimes V$ から $\mathrm{Hom}\,(U, V)$ への線形同型写像を定める.
さて, M を C^∞ 級多様体, E, F をともに M 上のベクトル束とする.
このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを E_p から F_p への線形写像全体とするベクトル束を考えることができる.
これを $\mathrm{Hom}\,(E, F)$ と表し, 準同型束という. $\mathrm{Hom}\,(E, E)$ は $\mathrm{End}\,E$ とも表す.
上において述べたことより, $\mathrm{Hom}\,(E, F)$ は $E^* \otimes F$ とみなすこともできる.
また, F が直積束 $M \times \mathbf{R}$ のとき, $\mathrm{Hom}\,(E, M \times \mathbf{R})$ は E^* に他ならない.

例 (外積束)
まず, V を r 次元実ベクトル空間とし, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}$ を固定しておく.
このとき, V の k 次外積空間という実ベクトル空間 $\bigwedge^k V$ を定めることができる.
例えば, V が双対空間 V^* として表されるときは V^* の k 次外積空間とは V 上の k 次交代形式全体からなるベクトル空間である.
また, U, V を実ベクトル空間, f を U から V への線形写像とする.
このとき, $\bigwedge^k U$ から $\bigwedge^k V$ への線形写像 $\bigwedge^k f$ を

$$\left(\bigwedge^k f\right)(u_1 \wedge u_2 \wedge \cdots \wedge u_k) = f(u_1) \wedge f(u_2) \wedge \cdots \wedge f(u_k) \quad (u_1, u_2, \ldots, u_k \in U)$$

により定めることができる.
さて, M を C^∞ 級多様体, E を M 上の階数 r のベクトル束とし, $k \in \{0, 1, 2, \ldots, r\}$ を固定しておく.
このとき, 各 $p \in M$ 上のファイバーを $\bigwedge^k E_p$ とするベクトル束を考えることができる.
これを $\bigwedge^k E$ と表し, E の k 次外積束という.
特に, $k = r$ のときは $\bigwedge^r E$ の変換関数は E の変換関数の行列式として表されることから, $\bigwedge^r E$ は $\det E$ とも表す.
例えば, $\bigwedge^k T^*M$ の切断は M 上の C^∞ 級 k 次微分形式に他ならない.

関連事項 11. Kronecker 積

線形写像のテンソル積を行列を用いて表してみよう.
U, U', V, V' を実ベクトル空間, f を U から U' への線形写像, g を V から V' への線形写像とする. 更に, $\{u_1, u_2, \ldots, u_m\}, \{u'_1, u'_2, \ldots, u'_{m'}\}, \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, \{v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n'}\}$ をそれぞれ U, U', V, V' の基底とし, これらの基底に関する f, g の表現行列をそれぞれ A, B とする. すなわち, A, B はそれぞれ $m' \times m$ 行列, $n' \times n$ 行列で,

$$(f(u_1), f(u_2), \ldots, f(u_m)) = (u'_1, u'_2, \ldots, u'_{m'})A,\ (g(v_1), g(v_2), \ldots, g(v_n)) = (v'_1, v'_2, \ldots, v'_{n'})B$$

をみたす.
$i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\begin{aligned}(f \otimes g)(u_i \otimes v_j) &= f(u_i) \otimes g(v_j) \\ &= \left(\sum_{k=1}^{m'} a_{ki} u'_k\right) \otimes \left(\sum_{l=1}^{n'} b_{lj} v'_l\right) \\ &= \sum_{k=1}^{m'} \sum_{l=1}^{n'} a_{ki} b_{lj} u'_k \otimes v'_l\end{aligned}$$

だから, $U \otimes V$ および $U' \otimes V'$ の基底として, それぞれ

$$\{u_1 \otimes v_1, u_1 \otimes v_2, \ldots, u_1 \otimes v_n, \ldots, u_m \otimes v_1, u_m \otimes v_2, \ldots, u_m \otimes v_n\},$$

$$\{u'_1 \otimes v'_1, u'_1 \otimes v'_2, \ldots, u'_1 \otimes v'_n, \ldots, u'_m \otimes v'_1, u'_m \otimes v'_2, \ldots, u'_m \otimes v'_n\}$$

を選んでおくと, これらの基底に関する $f \otimes g$ の表現行列は

$$\begin{pmatrix} a_{11}B & a_{12}B & \ldots & a_{1m}B \\ a_{21}B & a_{22}B & \ldots & a_{2m}B \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m'1}B & a_{m'2}B & \ldots & a_{m'm}B \end{pmatrix}$$

である. この表現行列を $A \otimes B$ と表し, A と B のテンソル積または Kronecker 積という.
Kronecker 積の基本的性質として双線形性が挙げられる. すなわち,

$$A \otimes (B + C) = A \otimes B + A \otimes C,\ (A + B) \otimes C = A \otimes C + B \otimes C,\ (cA) \otimes B = A \otimes (cB) = c(A \otimes B)$$

がなりたつ. ただし, A, B, C は演算が可能な型の行列, c は実数である.
また, A, B, C, D が積 AC, BD が定義される型の行列とすると,

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = AC \otimes BD$$

がなりたつ. 特に, A, B がともに正則行列ならば, $A \otimes B$ も正則で,

$$(A \otimes B)^{-1} = A^{-1} \otimes B^{-1}$$

である.