

### §3. 曲面の定義

区間で定義された実数値関数のグラフは平面上の曲線を表す. 関数の変数を1つ増やし, 2変数関数のグラフを考えると, 曲面というものが得られる. すなわち,  $D$ を平面 $\mathbf{R}^2$ の領域,  $f(x, y)$ を $D$ で定義された関数とすると, 関数 $f(x, y)$ のグラフとは空間 $\mathbf{R}^3$ 内の部分集合

$$\{(x, y, f(x, y)) \mid (x, y) \in D\}$$

のことである. 曲線の場合と同様に, 空間内の曲面はグラフとして表されるものばかりではない. まず, 3変数関数 $g(x, y, z)$ を用いて $g(x, y, z) = 0$ をみたす点 $(x, y, z)$ 全体の集合として曲面が表される場合がある. これを曲面の陰関数表示という.

例えば, 関数 $f(x, y)$ のグラフの場合は

$$g(x, y, z) = z - f(x, y)$$

とおけばよい.

また, 空間内の平面は定数 $a, b, c, d$ を用いて,

$$g(x, y, z) = ax + by + cz + d$$

とおけばよい. ただし,  $a, b, c$ の何れか1つは0ではないとする.

関数 $g(x, y, z)$ が $x, y, z$ の2次式の場合に現れる曲面を2次曲面という. 2次曲面は回転と平行移動の合成を行うことにより, 標準形というもので表すことができるが, 次に挙げる5つの例が特に重要である.

#### 例 (楕円面)

$a, b, c > 0$ とする. 陰関数表示を用いて表される曲面

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

を楕円面という. 特に,  $a = b = c$ のときは原点中心, 半径 $a$ の球面である.

#### 例 (一葉双曲面)

$a, b, c > 0$ とする. 陰関数表示を用いて表される曲面

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \right\}$$

を一葉双曲面という.

一葉双曲面の $z$ 軸に平行な平面による切り口は双曲線,  $z$ 軸に垂直な平面による切り口は楕円である.

#### 例 (二葉双曲面)

$a, b, c > 0$ とする. 陰関数表示を用いて表される曲面

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1 \right\}$$

を二葉双曲面という.

$\mathbf{R}^2$ で定義された関数 $f_+(x, y)$ および $f_-(x, y)$ を

$$f_{\pm}(x, y, z) = \pm c \sqrt{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + 1} \quad (\text{複号同順})$$

により定めると, 二葉双曲面は関数  $f_+(x, y)$  のグラフと関数  $f_-(x, y)$  のグラフの和集合である. 二葉双曲面の  $z$  軸に平行な平面による切り口は双曲線,  $z$  軸に垂直で  $z$  座標の絶対値が  $c$  より大きい平面による切り口は楕円である.

### 例 (楕円放物面)

$a, b > 0$  とする. 集合

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

を楕円放物面という. 楕円放物面はグラフとして表される 2 次曲面である.

楕円放物面の  $z$  軸に平行な平面による切り口は放物線,  $z$  軸に垂直で  $z$  座標が正の平面による切り口は楕円である.

### 例 (双曲放物面)

$a, b > 0$  とする. 集合

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} \right\}$$

を双曲放物面という. 双曲放物面はグラフとして表される 2 次曲面である.

双曲放物面の  $z$  軸に平行な平面による切り口は平面が

$$\left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid \frac{x}{a} \pm \frac{y}{b} = d \right\}$$

と表される場合でなければ放物線,  $z$  軸に垂直で  $xy$  平面と異なる平面による切り口は双曲線である.

以下では曲面の径数表示を主に考える. これは  $\mathbf{R}^2$  の領域から  $\mathbf{R}^3$  への写像として曲面を表す方法である. 曲面の径数表示においては写像の像としての曲面とそれを表す写像を同一視することが多い.

例えば,  $\mathbf{R}^2$  の領域  $D$  で定義された関数  $f(x, y)$  のグラフの場合は  $D$  から  $\mathbf{R}^3$  への写像  $p$  を

$$p(x, y) = (x, y, f(x, y)) \quad ((x, y) \in D)$$

により定めればよい.

微分幾何的な立場から曲面を扱う場合は, 現れる関数は微分可能である方がよい. 微分という手段を用いて曲面の曲がり具合を調べることができるからである. 以下では関数は必要に応じて微分可能であるとする.

また, 曲線の場合は正則なもの, すなわち各点において接線が存在するものを考えることが多いが, 曲面の場合にも同様なものを考えよう.

$D$  を  $uv$  平面の領域とし, 曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を考える.

Taylor の定理を用いると,  $(u_0, v_0) \in D$  の近くにおいて

$$p(u, v) = p(u_0, v_0) + p_u(u_0, v_0)(u - u_0) + p_v(u_0, v_0)(v - v_0) + R$$

と表すことができる. ただし,  $R$  は剰余項である.

ここで, 剰余項を取り除いて得られる式を用いて,  $\mathbf{R}^3$  の部分集合  $\Pi$  を

$$\Pi = \{p(u_0, v_0) + p_u(u_0, v_0)(u - u_0) + p_v(u_0, v_0)(v - v_0) \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

により定める.

3次元ベクトル空間  $\mathbf{R}^3$  の部分空間

$$\{p_u(u_0, v_0)u + p_v(u_0, v_0)v \mid (u, v) \in \mathbf{R}^2\}$$

が2次元となるのは  $2 \times 3$  行列  $\begin{pmatrix} p_u(u_0, v_0) \\ p_v(u_0, v_0) \end{pmatrix}$  の階数が2, すなわち

$$\text{rank} \begin{pmatrix} p_u(u_0, v_0) \\ p_v(u_0, v_0) \end{pmatrix} = 2$$

のときで, このとき  $\Pi$  は曲面  $p$  の点  $p(u_0, v_0)$  における接平面を表す. 上の  $2 \times 3$  行列を  $(u_0, v_0)$  における Jacobi 行列という.

**定義** 曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

は任意の  $(u, v) \in D$  に対して

$$\text{rank} \begin{pmatrix} p_u(u, v) \\ p_v(u, v) \end{pmatrix} = 2$$

となるとき, 正則であるという.

**例** 径数表示を用いて関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておく,

$$\begin{aligned} \text{rank} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} &= \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & f_u \\ 0 & 1 & f_v \end{pmatrix} \\ &= 2. \end{aligned}$$

よって, 関数のグラフは正則な曲面である.

楕円放物面, 双曲放物面は関数のグラフとして表されるから, 正則な曲面となる.

一方, 例えば楕円面は1つの径数表示だけでは表すことはできないことが分かる. このように一般の曲面を表すには幾つかの径数表示が必要となることが多い.

以下では特に断らない限り, 正則な曲面を考え, 単に曲面ということにする.

曲面

$$p : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

および  $(u, v) \in D$  に対して

$$\nu(u, v) = \frac{p_u(u, v) \times p_v(u, v)}{\|p_u(u, v) \times p_v(u, v)\|}$$

とおく. ただし,  $\times$  は  $\mathbf{R}^3$  の外積である. 曲面は正則であるとしているから,  $p_u(u, v), p_v(u, v)$  は1次独立で,  $p_u(u, v) \times p_v(u, v) \neq 0$  であることに注意しよう.  $\nu(u, v)$  は  $p_u(u, v), p_v(u, v)$  と直交し, 長さが1のベクトルである.  $\nu(u, v)$  を  $p(u, v)$  における単位法線ベクトルまたは単に単位法ベクトルという.

$\nu(u, v)$  は写像

$$\nu : D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を定める.  $\nu$  を曲面  $p$  の単位法ベクトル場または単に単位法ベクトルなどという.

## 問題 3

1. 径数表示を用いて関数のグラフを

$$p(u, v) = (u, v, f(u, v)) \quad ((u, v) \in D)$$

と表しておく.  $p$  の単位法ベクトルを求めよ.

- 2.
- $a, b, c > 0$
- とする. 径数表示を用いて楕円面の一部

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = (0, \pi) \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \sin u \cos v, b \sin u \sin v, c \cos u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.

- (1)  $p$  は正則であることを示せ.
- (2)  $p$  の単位法ベクトルを求めよ.

- 3.
- $a, b, c > 0$
- とする. 径数表示を用いて一葉双曲面の一部

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$D = \mathbf{R} \times (0, 2\pi),$$

$$p(u, v) = (a \cosh u \cos v, b \cosh u \sin v, c \sinh u) \quad ((u, v) \in D)$$

により定める.

- (1)  $p$  は正則であることを示せ.
- (2)  $p$  の単位法ベクトルを求めよ.

## 問題3の解答

1. まず,

$$p_u = (1, 0, f_u), \quad p_v = (0, 1, f_v).$$

よって,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (0 \cdot f_v - f_u \cdot 1, f_u \cdot 0 - 1 \cdot f_v, 1 \cdot 1 - 0 \cdot 0) \\ &= (-f_u, -f_v, 1). \end{aligned}$$

したがって,  $p$  の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(-f_u, -f_v, 1)}{\sqrt{f_u^2 + f_v^2 + 1}}.$$

2. (1)  $(u, v) \in D$  に対して

$$x(u, v) = a \sin u \cos v, \quad y(u, v) = b \sin u \sin v, \quad z(u, v) = c \cos u$$

とおくと,

$$\begin{aligned} x_u &= a \cos u \cos v, \quad y_u = b \cos u \sin v, \quad z_u = -c \sin u, \\ x_v &= -a \sin u \sin v, \quad y_v = b \sin u \cos v, \quad z_v = 0. \end{aligned}$$

更に,

$$A = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

とおくと,

$$A = ab \sin u \cos u, \quad B = bc \sin^2 u \cos v, \quad C = ca \sin^2 u \sin v.$$

$u \in (0, \pi)$  だから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 b^2} A^2 + \frac{1}{b^2 c^2} B^2 + \frac{1}{c^2 a^2} C^2 &= \sin^2 u \cos^2 u + \sin^4 u \cos^2 v + \sin^4 u \sin^2 v \\ &= \sin^2 u \cos^2 u + \sin^4 u \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって,  $A, B, C$  の内の少なくとも1つは0ではない.

したがって, 任意の  $(u, v) \in D$  に対して

$$\text{rank} \begin{pmatrix} p_u(u, v) \\ p_v(u, v) \end{pmatrix} = 2.$$

すなわち,  $p$  は正則.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (B, C, A) \\ &= (bc \sin^2 u \cos v, ca \sin^2 u \sin v, ab \sin u \cos u) \\ &= (\sin u)(bc \sin u \cos v, ca \sin u \sin v, ab \cos u). \end{aligned}$$

$u \in (0, \pi)$  だから,  $p$  の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(bc \sin u \cos v, ca \sin u \sin v, ab \cos u)}{\sqrt{b^2 c^2 \sin^2 u \cos^2 v + c^2 a^2 \sin^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \cos^2 u}}.$$

3. (1)  $(u, v) \in D$  に対して

$$x(u, v) = a \cosh u \cos v, \quad y(u, v) = b \cosh u \sin v, \quad z(u, v) = c \sinh u$$

とおくと,

$$\begin{aligned} x_u &= a \sinh u \cos v, & y_u &= b \sinh u \sin v, & z_u &= c \cosh u, \\ x_v &= -a \cosh u \sin v, & y_v &= b \cosh u \cos v, & z_v &= 0. \end{aligned}$$

更に,

$$A = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}$$

とおくと,

$$A = ab \sinh u \cosh u, \quad B = -bc \cosh^2 u \cos v, \quad C = -ca \cosh^2 u \sin v.$$

$\cosh u > 0$  だから,

$$\begin{aligned} \frac{1}{a^2 b^2} A^2 + \frac{1}{b^2 c^2} B^2 + \frac{1}{c^2 a^2} C^2 &= \sinh^2 u \cosh^2 u + \cosh^4 u \cos^2 v + \cosh^4 u \sin^2 v \\ &= \sinh^2 u \cosh^2 u + \cosh^4 u \\ &> 0. \end{aligned}$$

よって,  $A, B, C$  の内の少なくとも 1 つは 0 ではない.

したがって, 任意の  $(u, v) \in D$  に対して

$$\text{rank} \begin{pmatrix} p_u(u, v) \\ p_v(u, v) \end{pmatrix} = 2.$$

すなわち,  $p$  は正則.

(2) (1) の計算より,

$$\begin{aligned} p_u \times p_v &= (B, C, A) \\ &= (-bc \cosh^2 u \cos v, -ca \cosh^2 u \sin v, ab \sinh u \cosh u) \\ &= (\cosh u)(-bc \cosh u \cos v, -ca \cosh u \sin v, ab \sinh u). \end{aligned}$$

$\cosh u > 0$  だから,  $p$  の単位法ベクトルは

$$\frac{p_u \times p_v}{\|p_u \times p_v\|} = \frac{(-bc \cosh u \cos v, -ca \cosh u \sin v, ab \sinh u)}{\sqrt{b^2 c^2 \cosh^2 u \cos^2 v + c^2 a^2 \cosh^2 u \sin^2 v + a^2 b^2 \sinh^2 u}}.$$