§5. 双対空間

§1 や §4 において扱った接空間やベクトル場全体の集合をもとに余接空間や 1 次微分形式全体の集合というものを定義することができる. ここでは, そのような概念を定義するための準備として, ベクトル空間の双対空間について述べよう.
簡単のため, V を実ベクトル空間とする. $\mathbf{R}$ も実ベクトル空間とみなし, V から $\mathbf{R}$ への線形写像全体の集合を V^* と表すことにする. すなわち, $f \in V^*$ であるとは f は V から $\mathbf{R}$ への写像であり, 更に

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v)$$

が任意の $a, b \in \mathbf{R}$ および任意の $u, v \in V$ に対してなりたつことをいう.
V^* には次のようにして, 和とスカラー倍を定めることができる.
まず, $f, g \in V^*$ に対して, V から $\mathbf{R}$ への写像 $f + g$ を

$$(f + g)(v) = f(v) + g(v) \quad (v \in V)$$

により定める. このとき, $f + g \in V^*$ となる.
次に, $f \in V^*$, $a \in \mathbf{R}$ に対して, V から $\mathbf{R}$ への写像 af を

$$(af)(v) = af(v) \quad (v \in V)$$

により定める. このとき, $af \in V^*$ となる.
上のように和とスカラー倍を定めると, V^* は実ベクトル空間となることが分かる.
V^* の零ベクトルは V の任意のベクトルに対して 0 を対応させる線形写像である. これを 0 と表すことにする.
また, $f \in V^*$ のとき, f の逆ベクトル $-f$ は

$$(-f)(v) = -f(v) \quad (v \in V)$$

により定められる.
V^* を V の双対ベクトル空間または双対空間という.

命題 V を n 次元実ベクトル空間, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の基底とし, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ とする. このとき,

$$f(v_i) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{$*$}$$

をみたす $f \in V^*$ が一意的に存在する.

証明 $v \in V$ とし, $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}$ を基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する v の成分とする. すなわち,

$$v = x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n$$

である.
まず, $(*)$ をみたす $f \in V^*$ が存在すると仮定する.
このとき,

$$\begin{aligned} f(v) &= f(x_1 v_1 + x_2 v_2 + \cdots + x_n v_n) \\ &= x_1 f(v_1) + x_2 f(v_2) + \cdots + x_n f(v_n) \\ &= x_1 a_1 + x_2 a_2 + \cdots + x_n a_n. \end{aligned}$$

よって, f は

$$f(v) = x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n$$

により定めればよい.
次に, $f \in V^*$ が $(*)$ をみたし, $g \in V^*$ が

$$g(v_i) = a_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

をみたすと仮定する.
このとき,

$$f - g \in V^*$$

で,

$$\begin{aligned}(f-g)(v) &= f(v) - g(v) \\ &= (x_1a_1 + x_2a_2 \cdots + x_na_n) - (x_1a_1 + x_2a_2 + \cdots + x_na_n) \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって,

$$f - g = 0.$$

すなわち,

$$f = g.$$

したがって, $(*)$ をみたす $f \in V^*$ は一意的. □

定理 V を n 次元実ベクトル空間, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の基底とする. このとき,

$$f_i(v_j) = \delta_{ij} \quad (i, j = 1, 2, \ldots, n)$$

をみたす V^* の基底 $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ が一意的に存在する. ただし, δ_{ij} は Kronecker の δ である.
特に, V と V^* の次元は等しい.

証明 まず, 存在と一意性は上の命題を用いればよい.
次に,

$$c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n = 0 \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R})$$

がなりたつと仮定する.
$j = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\begin{aligned}0 &= (c_1f_1 + c_2f_2 + \cdots + c_nf_n)(v_j) \\ &= c_j.\end{aligned}$$

よって, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ は 1 次独立.
更に, $f \in V^*$ とすると, 上の命題の証明より,

$$f = f(v_1)f_1 + f(v_2)f_2 + \cdots + f(v_n)f_n.$$

したがって, V^* は $f_1, f_2, \ldots, f_n$ で生成されるから, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ は V^* の基底. □

上の定理における $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の双対基底という.
双対空間はベクトル空間であるから, 更にその双対空間を考えることができる.

V を n 次元実ベクトル空間とし, $v \in V$ に対して

$$v'(f) = f(v) \quad (f \in V^*)$$

とおく. このとき, v' は V^* から $\mathbf{R}$ への線形写像を定める. すなわち, $v' \in (V^*)^*$ である.
更に, v から v' への対応は V から $(V^*)^*$ への線形写像を定める. 次から分かるように, この対応は V から $(V^*)^*$ への同型写像となる.
$\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の基底, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の双対基底とする. $i, j = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\begin{aligned} v_i'(f_j) &= f_j(v_i) \\ &= \delta_{ji} \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

よって, $\{v_1', v_2', \ldots, v_n'\}$ は $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ の双対基底である.
したがって, $(V^*)^*$ の任意の元は V の元 v を用いて, v' と表すことができる.
なお, V が無限次元のときは, いつでもこのような同一視ができるとは限らない.
ベクトル空間からベクトル空間への線形写像があたえられていると, 行き先の双対空間から元の双対空間への線形写像を考えることができる.
V, W を実ベクトル空間, φ を V から W への線形写像とし, $g \in W^*$ に対して

$$({}^t\varphi(g))(v) = (g \circ \varphi)(v) \quad (v \in V)$$

とおく. このとき, ${}^t\varphi(g)$ は V から $\mathbf{R}$ への線形写像を定める. すなわち, ${}^t\varphi(g) \in V^*$ である.
更に, g から ${}^t\varphi(g)$ への対応は W^* から V^* への線形写像を定める. ${}^t\varphi$ を φ の双対写像という. 双対写像の記号をこのように表す根拠は次の定理である.

定理 V を n 次元実ベクトル空間, W を m 次元実ベクトル空間, φ を V から W への線形写像とする. 更に, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の基底, $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ を W の基底, A をこれらの基底に関する φ の表現行列とする. $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の双対基底, $\{g_1, g_2, \ldots, g_m\}$ を $\{w_1, w_2, \ldots, w_m\}$ の双対基底とすると, これらの基底に関する ${}^t\varphi$ の表現行列は ${}^tA$.

証明 $A = (a_{ij})$ とおくと, 表現行列の定義より,

$$\varphi(v_j) = \sum_{i=1}^{m} a_{ij} w_i \quad (j = 1, 2, \ldots, n).$$

よって, $i = 1, 2, \ldots, m$, $j = 1, 2, \ldots, n$ とすると,

$$\begin{aligned} ({}^t\varphi(g_i))(v_j) &= (g_i \circ \varphi)(v_j) \\ &= g_i \left(\sum_{k=1}^{m} a_{kj} w_k \right) \\ &= a_{ij}. \end{aligned}$$

すなわち,

$${}^t\varphi(g_i) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} f_j.$$

したがって, ${}^t\varphi$ の表現行列は ${}^tA$. □

問題 5

1. V を実ベクトル空間とする. V の部分集合 A に対して, V^* の部分集合 $A^\perp$ を

$$A^\perp = \{f \in V^* | \text{ 任意の } v \in A \text{ に対して } f(v) = 0\}$$

により定める.

(1) $A^\perp$ は V^* の部分空間であることを示せ. なお, $A^\perp$ を A の V^* における直交空間という.

(2) A, B を $A \subset B$ となる V の部分集合とする. このとき, $A^\perp \supset B^\perp$ であることを示せ.

(3) V の部分集合 A に対して, A の元の 1 次結合全体の集合を $F(A)$ と表すことにすると, $F(A)$ は V の部分空間となる. このとき, $A^\perp = F(A)^\perp$ であることを示せ. なお, $F(A)$ を A の生成する部分空間, または A の張る部分空間という.

(4) W_1, W_2 を V の部分空間とし, $W_1 \cup W_2$ の張る部分空間を $W_1 + W_2$ と表すと,

$$W_1 + W_2 = \{v_1 + v_2 | v_1 \in W_1,\ v_2 \in W_2\}$$

がなりたつ. このとき,

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp$$

であることを示せ. なお, $W_1 + W_2$ を W_1 と W_2 の和空間という.

(5) V を n 次元実ベクトル空間, W を V の m 次元部分空間とすると,

$$\dim W^\perp = n - m$$

であることを示せ.

問題 5 の解答

1. (1) まず, $0 \in A^{\perp}$ は明らか.
次に, $f, g \in A^{\perp}$, $v \in A$ とすると,

$$\begin{aligned}(f+g)(v) &= f(v) + g(v) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0\end{aligned}$$

だから,

$$f + g \in A^{\perp}.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $f \in A^{\perp}$, $v \in A$ とすると,

$$\begin{aligned}(cf)(v) &= cf(v) \\ &= c0 \\ &= 0\end{aligned}$$

だから,

$$cf \in A^{\perp}.$$

よって, $A^{\perp}$ は V^* の部分空間.

(2) $f \in B^{\perp}$, $v \in A$ とする.
$A \subset B$ だから, $v \in B$.
よって, $f(v) = 0$ だから, $f \in A^{\perp}$.
したがって, $B^{\perp} \subset A^{\perp}$.

(3) まず, $A \subset F(A)$ だから, (2) より,

$$F(A)^{\perp} \subset A^{\perp}.$$

逆に, $f \in A^{\perp}$ とする.
$v \in F(A)$ を

$$v = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k \quad (c_1, c_2, \ldots, c_k \in \mathbf{R},\ v_1, v_2, \ldots, v_k \in A)$$

と表しておくと,

$$\begin{aligned}f(v) &= f(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \cdots + c_k v_k) \\ &= c_1 f(v_1) + c_2 f(v_2) + \cdots + c_k f(v_k) \\ &= c_1 0 + c_2 0 + \cdots + c_k 0 \\ &= 0.\end{aligned}$$

よって,

$$f \in F(A)^{\perp}.$$

したがって,

$$A^{\perp} \subset F(A)^{\perp}.$$

以上より,

$$A^{\perp} = F(A)^{\perp}.$$

(4) まず,

$$W_1, W_2 \subset W_1 + W_2$$

だから, (2) より,

$$(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp, W_2^\perp.$$

よって,

$$(W_1 + W_2)^\perp \subset W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

逆に, $f \in W_1^\perp \cap W_2^\perp$ とする.
$v \in W_1 + W_2$ を

$$v = v_1 + v_2 \quad (v_1 \in W_1,\ v_2 \in W_2)$$

と表しておくと,

$$\begin{aligned} f(v) &= f(v_1 + v_2) \\ &= f(v_1) + f(v_2) \\ &= 0 + 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

よって,

$$f \in (W_1 + W_2)^\perp.$$

したがって,

$$W_1^\perp \cap W_2^\perp \subset (W_1 + W_2)^\perp.$$

以上より,

$$(W_1 + W_2)^\perp = W_1^\perp \cap W_2^\perp.$$

(5) W の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_m\}$ を 1 つ選んでおき, これに V の元 $v_{m+1}, v_{m+2}, \ldots, v_n$ を付け加えて, $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ が V の基底となるようにしておく.
$\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の双対基底とすると,

$$f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots, f_n \in W^\perp.$$

ここで, $f \in W^\perp$ を

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n \quad (c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbf{R})$$

と表しておくと, $i = 1, 2, \ldots, m$ のとき,

$$\begin{aligned} 0 &= f(v_i) \\ &= (c_1 f_1 + c_2 f_2 + \cdots + c_n f_n)(v_i) \\ &= c_i. \end{aligned}$$

よって,

$$f = c_{m+1} f_{m+1} + c_{m+2} f_{m+2} + \cdots + c_n f_n.$$

したがって,

$$\dim W^\perp = n - m.$$