§12. Gauss-Bonnet の定理

平面上の三角形の内角の和が 180 度であることは小学校の算数でも学ぶ馴染み深い定理であるが, これは Gauss-Bonnet の定理の特別な場合とみなすことができる.
まず, 上の事実は直ちに多角形の場合に一般化できる.
P を平面上の n 角形とし, 内角を $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ とする. P は $(n-2)$ 個の三角形に分割することができるから,

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = (n-2)\pi$$

である.
実は, 内角の和を考えるよりも, 外角の和を考える方が式は単純になる.
上の P の場合, $i = 1, 2, \ldots, n$ とし, 内角 α_i に対応する外角を β_i とすると,

$$\beta_i = \pi - \alpha_i$$

である.
よって, 外角の和は

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n} \beta_i &= \sum_{i=1}^{n} (\pi - \alpha_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \pi - \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \\ &= n\pi - (n-2)\pi \\ &= 2\pi.\end{aligned}$$

すなわち,

$$\sum_{i=1}^{n} \beta_i = 2\pi \tag{$*$}$$

が得られる. 要するに, 多角形に沿って 1 周すると 360 度回ったことになる, という訳である. なお, ここでは多角形に囲まれる領域を左手に見ながら 1 周していることに注意しよう.
次に, 多角形を一般化し, 曲線の和集合として表される閉曲線の場合を考えてみよう. 三角形であれば 3 つの線分の和集合として表されるし, n 角形であれば n 個の線分の和集合として表される. ただし, 曲線の和集合として表される閉曲線は単純, すなわち自己交差しないとする. また, 閉曲線には囲まれる領域が進行方向の左手となるように向きを定めておく.
γ を n 個の曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ の和集合として表される単純閉曲線とする. 必要ならば順番を入れ替えることにより, γ_i の終点が γ_{i+1} の始点に一致するとしてよい. なお, $i = 1, 2, \ldots, n$ で, $\gamma_{n+1} = \gamma_1$ とおくことにする.
このとき, γ_i の端点の部分では多角形の場合と同様に外角を定義することができる. 実際, γ_i の終点における接線と γ_{i+1} の始点における接線のなす角を用いて, 外角を計算すればよい. このようにして得られた外角を $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ とする.
また, 平面曲線に対しては §10 においても述べたように, 曲率という関数を定めることができる. γ の曲率を κ とする. κ は γ_i の端点では連続ではない可能性があるが, そのような点は高々有限個である. よって, s を γ の弧長径数とすると, 1 次微分形式 κds は γ 上で積分可能で, 次がなりたつことが分かる.

定理 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}\beta_i + \int_\gamma \kappa ds = 2\pi.$

上の定理において, γ が多角形の場合は有限個の点を除いて $\kappa = 0$ だから, $(*)$ が得られる.
また, γ が端点も込めて C^2 級の 1 つの曲線で表されている場合は, 左辺の第 1 項は不要となるから,

$$\int_\gamma \kappa ds = 2\pi$$

が得られる. 左辺を 2π で割ったものは平面閉曲線の回転数を表す式である. 一般に, 単純平面閉曲線の回転数は ± 1 であることを注意しておこう.
更に, 曲面上の閉曲線の場合を考えよう.
上の定理では, 平面曲線の曲率が現れたが, 一般の曲面の場合, これは測地的曲率というものに相当する. まず, 測地的曲率について述べよう.
曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

に対して,

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

を弧長により径数付けられた p 上の曲線とする. γ が単純ならば, γ の像の近くで p の正規直交標構 $\{e_1, e_2, e_3\}$ を

$$e_1(\gamma(s)) = \gamma'(s) \quad (s \in [a, b])$$

となるように選んでおくことができる.
このとき,

$$\|\gamma'\|^2 = 1$$

の両辺を微分すると,

$$\langle \gamma', \gamma'' \rangle = 0.$$

よって, ある $[a, b]$ で定義された関数

$$\kappa_g, \kappa_n : [a, b] \to \mathbf{R}$$

が存在し

$$\gamma''(s) = \kappa_g(s) e_2(\gamma(s)) + \kappa_n(s) e_3(\gamma(s))$$

となる. κ_g, κ_n をそれぞれ測地的曲率, 法曲率という. なお, κ_g が恒等的に 0 となるとき, γ は測地線である. 例えば, $\mathbf{R}^3$ 内の平面上の直線は測地線である. また, 半径が一定の球面上の大円も測地線である.
上の定理を曲面上の閉曲線の場合に一般化するには, 更に曲面自身の曲がり具合も考慮に入れる必要がある.
多変数の微分積分において学ぶように, 平面の領域 D で定義された関数 f のグラフの曲面積は重積分

$$\iint_D \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2}\, dudv$$

によりあたえられる.

これを一般化し, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とすると, p の曲面積は重積分

$$\iint_D \sqrt{EG - F^2}dudv$$

によりあたえられる. ここで現れた $\sqrt{EG - F^2}dudv$ は面積要素である. これは 2 次微分形式として $\sqrt{EG - F^2}du \wedge dv$ とも表す.
ここでは Gauss-Bonnet の定理の証明は行わないが, 証明には §8 においても触れた Stokes の定理が用いられる. そのため, 上の定理を単純に曲面上の閉曲線の場合に一般化するには, 平面上の多角形と同様に, 閉曲線の囲む領域は単連結領域というものでなければならない. 単連結領域とは大雑把に言えば, 穴が空いていない領域である. 問題 8 で扱った Poincaré の補題の反例についても思い出そう.
改めて記号などの整理をしておこう. D を平面上の単連結な領域とし, 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の D の境界 ∂D への制限 $p|_{\partial D}$ は n 個の曲線 $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ の和として表される単純閉曲線とする. ただし, $p|_{\partial D}$ には囲まれる領域が進行方向の左手となるように向きを定めておく. また, β_i を各 γ_i の終点における外角, κ_g を $p|_{\partial D}$ の測地的曲率, s を $p|_{\partial D}$ の弧長径数, K を p の Gauss 曲率, $d\mu$ を p の面積要素とする. このとき, 次がなりたつ.

Gauss-Bonnet の定理 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \beta_i + \int_{\partial D} \kappa_g ds + \int_D K d\mu = 2\pi.$

定理に現れた外角, 測地的曲率, Gauss 曲率, 面積要素は第一基本形式のみに依存することを注意しておこう. 上では曲面を $\mathbf{R}^3$ への写像として表しているが, 実際には領域上に Riemann 計量さえあたえられていれば, 上の定理はなりたつのである.

注意 向き付けられた閉曲面というものの上で Gauss 曲率という微分幾何的な量を積分すると, 位相幾何的な不変量が現れる, というのが, もう 1 つの Gauss-Bonnet の定理である.
まだ, 多様体の定義をしていないが, 閉曲面とはコンパクトな 2 次元多様体のことであり, 曲面が向き付けられているというのは, 0 にならない 2 次微分形式が存在するという意味である.
また, 向き付けられた閉曲面は球面に有限個の把手を付けたものと同相であることが分かり, Euler 数というもので区別することができる. このとき, 付けた把手の数を種数という. 例えば, 球面の種数は 0, トーラスの種数は 1 である. 種数 g の向き付けられた閉曲面 M に対して, その Euler 数を $\chi(M)$ と表すと,

$$\chi(M) = 2 - 2g$$

であることが分かる. このとき, Gauss-Bonnet の定理は

$$\int_M K d\mu = 2\pi\chi(M)$$

と表されることが分かる.

問題 12

1. 曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

に対して,

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^3$$

を弧長により径数付けられた p 上の曲線, $\{e_1, e_2, e_3\}$ を

$$e_1(\gamma(s)) = \gamma'(s) \quad (s \in [a, b])$$

となる γ の像の近くにおける p の正規直交標構とする. 更に, κ_g, κ_n をそれぞれ γ の測地的曲率, 法曲率とし, $\omega_1^1, \omega_1^2, \ldots, \omega_3^3$ を等式

$$\begin{pmatrix} de_1 \\ de_2 \\ de_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \omega_1^1 & \omega_1^2 & \omega_1^3 \\ \omega_2^1 & \omega_2^2 & \omega_2^3 \\ \omega_3^1 & \omega_3^2 & \omega_3^3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}$$

をみたす 1 次微分形式とする. このとき,

$$\kappa_g = \omega_1^2 \left(\frac{d}{ds} \right), \ \kappa_n = \omega_1^3 \left(\frac{d}{ds} \right)$$

がなりたつことを示せ.

2. $\{e_1, e_2, e_3\}$ を曲面

$$p : D \to \mathbf{R}^3$$

の正規直交標構とし, θ^1, θ^2 を

$$dp = \theta^1 e_1 + \theta^2 e_2$$

となる 1 次微分形式とする. このとき, p の面積要素は $\theta^1 \wedge \theta^2$ であることを示せ.

3. 半径が一定の球面上の測地線を辺とする三角形の内角の和は 180 度より大きいことを示せ.

4. 2 つの測地線を境界とする Gauss 曲率が 0 以下の曲面上の単連結な領域は存在しないことを示せ.

問題 12 の解答

1. まず,

$$\begin{aligned}\kappa_g &= \langle \gamma'', e_2 \circ \gamma \rangle \\ &= \langle (e_1 \circ \gamma)', e_2 \circ \gamma \rangle \\ &= \left\langle (de_1)\left(\frac{d}{ds}\right), e_2 \circ \gamma \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3\right)\left(\frac{d}{ds}\right), e_2 \circ \gamma \right\rangle \\ &= \omega_1^2\left(\frac{d}{ds}\right).\end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned}\kappa_n &= \langle \gamma'', e_3 \circ \gamma \rangle \\ &= \langle (e_1 \circ \gamma)', e_3 \circ \gamma \rangle \\ &= \left\langle (de_1)\left(\frac{d}{ds}\right), e_3 \circ \gamma \right\rangle \\ &= \left\langle \left(\omega_1^1 e_1 + \omega_1^2 e_2 + \omega_1^3 e_3\right)\left(\frac{d}{ds}\right), e_3 \circ \gamma \right\rangle \\ &= \omega_1^3\left(\frac{d}{ds}\right).\end{aligned}$$

2. まず, D で定義された 2 次の正則行列に値をとる関数 A が存在し,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}.$$

$A = (a_{ij})$ とおくと,

$$\begin{aligned}p_u \times p_v &= (a_{11}e_1 + a_{12}e_2) \times (a_{21}e_1 + a_{22}e_2) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})e_1 \times e_2 \\ &= |A|e_3 \\ &= \frac{|A|}{\|p_u \times p_v\|} p_u \times p_v.\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}|A| &= \|p_u \times p_v\| \\ &> 0.\end{aligned}$$

また,

$$(du, dv)A = (\theta^1, \theta^2)$$

だから,

$$\begin{aligned}\theta^1 \wedge \theta^2 &= (a_{11}du + a_{21}dv) \wedge (a_{12}du + a_{22}dv) \\ &= (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})du \wedge dv \\ &= |A|du \wedge dv.\end{aligned}$$

ここで, p の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とする.
このとき,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} ({}^t p_u, {}^t p_v) \\ &= A \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} ({}^t e_1, {}^t e_2) {}^t A \\ &= A {}^t A.\end{aligned}$$

したがって,

$$|A|^2 = EG - F^2.$$

$|A| > 0$ だから,

$$\theta^1 \wedge \theta^2 = \sqrt{EG - F^2} du \wedge dv.$$

すなわち, $\theta^1 \wedge \theta^2$ は p の面積要素.

3. K を半径が一定の球面の Gauss 曲率とすると, K は正の定数である.
$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ をこの球面上の測地線を辺とする三角形の内角とし, D をこの三角形の内部の領域, $d\mu$ を D の面積要素とする.
測地線の測地的曲率は 0 だから, Gauss-Bonnet の定理より,

$$\sum_{i=1}^{3} (\pi - \alpha_i) + \int_D K d\mu = 2\pi.$$

よって,

$$\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = \pi + \int_D K d\mu.$$

$K > 0$ だから, 内角の和は 180 度より大きい.

4. 題意のような曲面 p 上の領域 D が存在すると仮定する.
β_1, β_2 を ∂D の 2 つの測地線の終点における外角, K を p の Gauss 曲率, $d\mu$ を D の面積要素とする.
測地線の測地的曲率は 0 だから, Gauss-Bonnet の定理より,

$$\beta_1 + \beta_2 + \int_D K d\mu = 2\pi.$$

ここで, β_1, β_2 が π となることはないから,

$$\begin{aligned}\int_D K d\mu &= 2\pi - \beta_1 - \beta_2 \\ &> 2\pi - \pi - \pi \\ &= 0.\end{aligned}$$

$K \leq 0$ だから, これは矛盾.
よって, 題意のような領域は存在しない.