§1. 位相空間

多様体は位相空間に対して定義されるものである．ここでは位相空間に関する基本的事項について述べよう．

定義　X を空でない集合とする．X の部分集合系 $\mathfrak{O}$ が次の (1)〜(3) をみたすとき, $\mathfrak{O}$ を位相という．また, 組 $(X, \mathfrak{O})$ または単に X を位相空間という．

(1) $X, \emptyset \in \mathfrak{O}$.

(2) $O_1, O_2, \ldots, O_k \in \mathfrak{O}$ ならば, $O_1 \cap O_2 \cap \cdots \cap O_k \in \mathfrak{O}$.

(3) $(O_\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ を $\mathfrak{O}$ の元からなる集合族とすると, $\displaystyle\bigcup_{\lambda \in \Lambda} O_\lambda \in \mathfrak{O}$.

位相空間 $(X, \mathfrak{O})$ に対して $\mathfrak{O}$ の元を X の開集合という．このとき, $\mathfrak{O}$ を X の開集合系ともいう．

例 (距離空間)
(X, d) を距離空間とする．すなわち, X は空でない集合, d は $X \times X$ で定義された実数値関数で, 次の (1)〜(3) をみたすとする．

(1) 任意の $x, y \in X$ に対して $d(x, y) \geq 0$ で, $d(x, y) = 0$ となるのは $x = y$ のときのみ.

(2) $x, y \in X$ とすると, $d(x, y) = d(y, x)$.

(3) $x, y, z \in X$ とすると, $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ (三角不等式).

このとき, 距離 d を用いることにより, X の開集合を定めることができる．
更に, $\mathfrak{O}$ を X の開集合全体からなる X の部分集合系とすると, $(X, \mathfrak{O})$ は位相空間となる．
例えば, d を $\mathbf{R}^n$ の Euclid 距離とすると, $(\mathbf{R}^n, d)$ は距離空間となる．

例　X を 1 つの元 p のみからなる集合とする．
このとき, X に対して考えることのできる位相は $\{\emptyset, X\}$ のみである．
X を 2 つの元 p, q からなる集合とし, X の部分集合系 $\mathfrak{O}_1, \mathfrak{O}_2, \mathfrak{O}_3, \mathfrak{O}_4$ を

$$\mathfrak{O}_1 = \{\emptyset, X\},\ \mathfrak{O}_2 = \{\emptyset, \{p\}, X\},\ \mathfrak{O}_3 = \{\emptyset, \{q\}, X\},\ \mathfrak{O}_4 = \{\emptyset, \{p\}, \{q\}, X\}$$

により定める．
このとき, X に対して考えることのできる位相は $\mathfrak{O}_1$〜$\mathfrak{O}_4$ の 4 つである．
なお, 有限集合に対して考えることのできる位相の個数を簡単に表す式は知られていない．

例 (密着空間)
X を空でない集合とすると, X の部分集合系 $\{\emptyset, X\}$ は X の位相を定める．この位相を密着位相という．密着位相を考えた位相空間を密着空間という．
X が 2 つ以上の元を含むならば, X の密着位相は距離から定まる位相とはなりえないことが分かる．このようなとき, 位相空間は距離付け可能でないという．

例 (離散空間)
X を空でない集合とすると, X の巾集合, すなわち X の部分集合全体からなる部分集合系は X の位相を定める．この位相を離散位相という．離散位相を考えた位相空間を離散空間という．
ここで, $(x, y) \in X \times X$ とし, $X \times X$ で定義された実数値関数 d を

$$d(x, y) = \begin{cases} 1 & (x \neq y), \\ 0 & (x = y) \end{cases}$$

により定めると, (X,d) は距離空間となる.
更に, X の1点からなる部分集合は d に関して開集合となるから, d は離散位相を定める.
よって, 離散空間は距離付け可能である.

$(X,\mathfrak{O})$ を位相空間とする. X を全体集合とし, X の部分集合系 $\mathfrak{A}$ を

$$\mathfrak{A}=\{A\subset X|A^c\in\mathfrak{O}\}$$

により定める. $\mathfrak{A}$ の元を X の閉集合という. また, $\mathfrak{A}$ を X の閉集合系という.

定理 $\mathfrak{A}$ を位相空間 $(X,\mathfrak{O})$ の閉集合系とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $X,\emptyset\in\mathfrak{A}$.
(2) $A_1,A_2,\ldots,A_k\in\mathfrak{A}$ ならば, $A_1\cup A_2\cup\cdots\cup A_k\in\mathfrak{A}$.
(3) $(A_\lambda)_{\lambda\in\Lambda}$ を $\mathfrak{A}$ の元からなる集合族とすると, $\bigcap\limits_{\lambda\in\Lambda}A_\lambda\in\mathfrak{A}$.

$(X,\mathfrak{O})$ を位相空間, M を X の部分集合とし,

$$M^i=\bigcup\{O\subset M|O \text{ は } X \text{ の開集合 }\}$$

とおく. M^i を M の内部という. 内部および位相の定義より, M^i は X の開集合である. M^i の点を M の内点という.
次に, N を X の部分集合とし, $a\in X$ とする. a が N の内点となるとき, N を a の近傍という.
特に, a を含む開集合は a の近傍である.
近傍を用いると, 開集合は次のように特徴付けることができる.

定理 $(X,\mathfrak{O})$ を位相空間, O を X の空でない部分集合とする. O が開集合であるための必要十分条件は任意の $x\in O$ に対して O が x の近傍であること.

位相空間から位相空間への写像の連続性は次のように定める.

定義 $(X_1,\mathfrak{O}_1),(X_2,\mathfrak{O}_2)$ を位相空間, f を X_1 から X_2 への写像とし, $x\in X_1$ とする.
$f(x)$ の任意の近傍 N に対して $f^{-1}(N)$ が x の近傍となるとき, f は x で連続であるという.
また, f は任意の $x\in X_1$ で連続なとき, X_1 で連続であるという.

写像の連続性に関して, 次がなりたつ.

定理 $(X_1,\mathfrak{O}_1),(X_2,\mathfrak{O}_2)$ を位相空間, f を X_1 から X_2 への写像とすると, 次の (1)〜(3) は同値.

(1) 任意の $x\in X_1$ に対して f は x で連続.
(2) X_2 の任意の開集合 O に対して $f^{-1}(O)$ は X_1 の開集合,
すなわち任意の $O\in\mathfrak{O}_2$ に対して $f^{-1}(O)\in\mathfrak{O}_1$.
(3) X_2 の任意の閉集合 A に対して $f^{-1}(A)$ は X_1 の閉集合.

上の定理より, 位相空間 $(X_1,\mathfrak{O}_1)$ から位相空間 $(X_2,\mathfrak{O}_2)$ への写像 f が連続であることの定義は上の定理の (1)〜(3) のどれを用いてもよい.

例 $(X_1,\mathfrak{O}_1)$ を離散空間, $(X_2,\mathfrak{O}_2)$ を位相空間, f を X_1 から X_2 への写像とする.
$O\in\mathfrak{O}_2$ とすると, $f^{-1}(O)$ は X_1 の部分集合である.
離散位相の定義より, $f^{-1}(O)\in\mathfrak{O}_1$.
よって, f は連続.
すなわち, 離散空間から任意の位相空間への写像は連続である.

例 $(X_1, \mathfrak{O}_1)$ を位相空間, $(X_2, \mathfrak{O}_2)$ を密着空間, f を X_1 から X_2 への写像とする.
密着位相の定義より,

$$\mathfrak{O}_2 = \{\emptyset, X_2\}.$$

ここで,

$$f^{-1}(\emptyset) = \emptyset,\ f^{-1}(X_2) = X_1.$$

位相の定義より,

$$\emptyset, X_1 \in \mathfrak{O}_1.$$

よって, f は連続.
すなわち, 任意の位相空間から密着空間への写像は連続である.

例 (定値写像)
$(X_1, \mathfrak{O}_1), (X_2, \mathfrak{O}_2)$ を位相空間とし, $y_0 \in X_2$ を固定しておく.
X_1 から X_2 への写像 f を

$$f(x) = y_0 \quad (x \in X_1)$$

により定める. すなわち, f は定値写像である.
このとき, f は連続となることが分かる.
すなわち, 定値写像は連続である.

例 (合成写像)
$(X_1, \mathfrak{O}_1), (X_2, \mathfrak{O}_2), (X_3, \mathfrak{O}_3)$ を位相空間, f を X_1 から X_2 への連続写像, g を X_2 から X_3 への連続写像とする.
このとき, 合成写像 $g \circ f$ は X_1 から X_3 への連続写像となることが分かる.
すなわち, 連続写像の合成は連続である.

多様体を定義する際に現れる位相空間に対しては, 奇妙な例を除外するために第 2 分離公理または Hausdorff の公理という分離公理をしばしば仮定する.

定義 $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とする. 異なる任意の $x, y \in X$ に対して互いに交わらない x の近傍および y の近傍が存在するとき, X は Hausdorff であるという.

例 (X, d) を距離空間, $x, y \in X$ を異なる 2 点とする.
このとき,

$$d(x, y) > 0$$

だから, r を

$$0 < r < \frac{1}{2} d(x, y)$$

をみたすように選んでおくことができる.
ここで, x の近傍 U および y の近傍 V を

$$U = \{z \in X | d(x, z) < r\},\ V = \{z \in X | d(y, z) < r\}$$

により定める.
このとき, 三角不等式より, U と V は互いに交わらないことが分かるから, (X, d) は Hausdorff.
すなわち, 距離空間は Hausdorff 空間である.

例 X を 2 つ以上の元を含む密着空間とする.
このとき, X は Hausdorff ではない.

問題 1

1. 閉区間 $[a,b]$ で定義された実数値連続関数全体の集合を $C[a,b]$ と表すことにする．$f,g \in C[a,b]$ に対して

$$d(f,g) = \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$$

とおく．このとき，$d(f,g) \geq 0$ で，$d(f,g) = 0$ となるのは $f = g$ のときのみである．

(1) $d(f,g) = d(g,f)$ がなりたつことを示せ．

(2) d は三角不等式をみたすことを示せ．特に，$(C[a,b], d)$ は距離空間となる．

2. $(X, \mathfrak{O})$ を位相空間とし，$\mathbf{R}$ に対しては Euclid 距離から定まる通常の位相を考える．X で定義された実数値連続関数，すなわち X から $\mathbf{R}$ への写像で連続なものを X 上の実連続関数という．X 上の実連続関数全体の集合を $C(X)$ と表すことにする．

$f,g \in C(X)$, $c \in \mathbf{R}$, $x \in X$ とすると，X で定義された実数値関数 $f+g, cf$ をそれぞれ

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x), \ (cf)(x) = cf(x)$$

により定めることができる．このとき，$f+g, cf \in C(X)$ となることが分かる．

(1) $f,g \in C(X)$ に対して X で定義された実数値関数 $f-g$ を

$$(f-g)(x) = f(x) - g(x) \quad (x \in X)$$

により定める．$f-g \in C(X)$ であることを示せ．

(2) $f,g \in C(X)$ ならば，X の部分集合

$$\{x \in X | f(x) = g(x)\}$$

は閉集合であることを示せ．

(3) $f,g \in C(X)$ ならば，X の部分集合

$$\{x \in X | f(x) \leq g(x)\}$$

は閉集合であることを示せ．

(4) $f,g \in C(X)$ ならば，X の部分集合

$$\{x \in X | f(x) < g(x)\}$$

は開集合であることを示せ．

3. X を Hausdorff 空間とする．$x \in X$ とすると，X の部分集合 $\{x\}$ は閉集合であることを示せ．

4. $(X_1, \mathfrak{O}_1)$ を位相空間，$(X_2, \mathfrak{O}_2)$ を Hausdorff 空間，f,g を X_1 から X_2 への連続写像とする．このとき，X_1 の部分集合

$$\{x \in X_1 | f(x) = g(x)\}$$

は閉集合であることを示せ．

問題 1 の解答

1. (1) d の定義と絶対値の性質より,

$$\begin{aligned} d(f,g) &= \int_a^b |f(x)-g(x)|dx \\ &= \int_a^b |g(x)-f(x)|dx \\ &= d(g,f). \end{aligned}$$

(2) $f, g, h \in C[a,b]$, $x \in [a,b]$ とする.
絶対値に対する三角不等式より,

$$\begin{aligned} |f(x)-h(x)| &= |(f(x)-g(x)) + (g(x)-h(x))| \\ &\leq |f(x)-g(x)| + |g(x)-h(x)|. \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} d(f,h) &= \int_a^b |f(x)-h(x)|dx \\ &\leq \int_a^b |f(x)-g(x)|dx + \int_a^b |g(x)-h(x)|dx \\ &= d(f,g) + d(g,h). \end{aligned}$$

したがって, d は三角不等式をみたす.

2. (1) $f, (-1)g \in C(X)$ だから,

$$f - g = f + (-1)g \in C(X).$$

(2) まず,

$$\begin{aligned} \{x \in X | f(x) = g(x)\} &= \{x \in X | f(x) - g(x) = 0\} \\ &= (f-g)^{-1}(\{0\}). \end{aligned}$$

$\{0\}$ は $\mathbf{R}$ の閉集合だから, (1) より上の集合は X の閉集合.
(3) まず,

$$\begin{aligned} \{x \in X | f(x) \leq g(x)\} &= \{x \in X | f(x) - g(x) \leq 0\} \\ &= (f-g)^{-1}((-\infty, 0]). \end{aligned}$$

$(-\infty, 0]$ は $\mathbf{R}$ の閉集合だから, (1) より上の集合は X の閉集合.
(4) まず,

$$\begin{aligned} \{x \in X | f(x) < g(x)\} &= \{x \in X | f(x) - g(x) < 0\} \\ &= (f-g)^{-1}((-\infty, 0)). \end{aligned}$$

$(-\infty, 0)$ は $\mathbf{R}$ の開集合だから, (1) より上の集合は X の開集合.

3. $X = \{x\}$ のときは明らかだから, $X \supsetneq \{x\}$ としてよい.

$y \in X$ を x と異なる点とする.
X は Hausdorff だから, x と交わらない y の近傍が存在する.
よって, y は $X \setminus \{x\}$ の内点となるから, $X \setminus \{x\}$ は開集合.
したがって, $\{x\}$ は閉集合.

4. 題意の部分集合を A とおく.
A^c が開集合であることを示せばよい.
$x \in A^c$ とすると,

$$f(x) \neq g(x).$$

X_2 は Hausdorff だから, 互いに交わらない $f(x)$ の近傍 U および $g(x)$ の近傍 V が存在する.
f, g は連続だから, $f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V)$ は x の近傍で,

$$f^{-1}(U) \cap g^{-1}(V) \subset A^c.$$

よって, x は A^c の内点.
したがって, A^c は開集合.