

§3. 多様体の例

ここでは、基本的な多様体の例を挙げていこう。

例 (Euclid 空間)

n 次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^n は n 次元 C^∞ 級多様体である。

実際、 \mathbf{R}^n は Hausdorff で、 $1_{\mathbf{R}^n}$ を \mathbf{R}^n の恒等写像とすると、 $\{(\mathbf{R}^n, 1_{\mathbf{R}^n})\}$ が C^∞ 級座標近傍系となる。

径数付き多様体というものを張り合わせると、多様体を作ることができる。

M を \mathbf{R}^n の部分集合とし、 M の位相としては \mathbf{R}^n の通常の位相から導かれる相対位相を考える。問題2においても扱ったように、 M は Hausdorff である。

ここで、任意の $p \in M$ に対して、 p を含む M のある開集合 U が m 次元 C^r 級径数付き多様体

$$f: D \rightarrow \mathbf{R}^n$$

の像として表されているとする。すなわち、 f は \mathbf{R}^m の開集合 D で C^r 級の \mathbf{R}^n に値をとる関数で、次の (1)~(3) がなりたつ。

- (1) 任意の $x \in D$ に対して $\text{rank } f'(x) = m$.
- (2) f は D から U への全単射。
- (3) f^{-1} は U から D への連続写像。

このとき、 (U, f^{-1}) は M の座標近傍となる。

また、 (U, f^{-1}) および (V, g^{-1}) を上のような M の座標近傍で、

$$U \cap V \neq \emptyset$$

となるものとする、逆写像定理を用いることにより、 (U, f^{-1}) から (V, g^{-1}) への座標変換

$$g^{-1} \circ f: f^{-1}(U \cap V) \rightarrow g^{-1}(U \cap V)$$

は C^r 級微分同相写像となることが分かる。

特に、上のような座標近傍全体の集合を \mathcal{S} とおくと、 \mathcal{S} は M の C^r 級座標近傍系を定める。

よって、 (M, \mathcal{S}) は m 次元 C^r 級多様体となる。

径数付き多様体の張り合わせによって得られる多様体の中でも、次の例は基本的である。

例 (球面)

$n \in \mathbf{N}$ に対して \mathbf{R}^{n+1} の部分集合 S^n を

$$S^n = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$$

により定める。

S^n を原点中心、半径1の n 次元球面という。

ここで、 $i = 1, 2, \dots, n+1$ に対して、 S^n の開集合 U_i^+, U_i^- をそれぞれ

$$U_i^+ = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i > 0\}, \quad U_i^- = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in S^n \mid x_i < 0\}$$

により定める。

また、 \mathbf{R}^n の開集合 D を

$$D = \{y \in \mathbf{R}^n \mid \|y\| < 1\}$$

により定め、 D から \mathbf{R}^{n+1} への写像 f_i^+, f_i^- をそれぞれ

$$f_i^+(y) = (y_1, \dots, y_{i-1}, \sqrt{1 - \|y\|^2}, y_i, \dots, y_n), \quad f_i^-(y) = (y_1, \dots, y_{i-1}, -\sqrt{1 - \|y\|^2}, y_i, \dots, y_n)$$

により定める。ただし、

$$y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in D$$

である。

このとき、 f_i^+, f_i^- はそれぞれ

$$f_i^+(D) = U_i^+, \quad f_i^-(D) = U_i^-$$

となる n 次元 C^∞ 級径数付き多様体で、

$$S^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i^+ \cup \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i^-.$$

よって、 S^n は n 次元 C^∞ 級多様体である。

また、立体射影を 2 つ用いても S^n の C^∞ 級座標近傍系を定めることができるが、これは上のようにして定まる C^∞ 級座標近傍系と同値であることが分かる。

問題 2 においても現れた n 次元実射影空間 $\mathbf{R}P^n$ は多様体となる。

まず、 $\mathbf{R}P^n$ の位相については同値類を対応させる自然な射影

$$\pi : \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbf{R}P^n$$

による商位相を考えることにする。すなわち、 $\mathbf{R}P^n$ の部分集合 U が開集合となるのは、 $\pi^{-1}(U)$ が $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合のときである。商位相の定義より、 π は連続である。

このとき、次がなりたつことが分かる。

定理 $\mathbf{R}P^n$ は Hausdorff.

$p \in \mathbf{R}P^n$ を

$$p = \pi(x) \quad (x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}) \quad (*)$$

と表しておく。

ここで、 $i = 1, 2, \dots, n+1$ とすると、 $x_i \neq 0$ という性質は p の代表元 x の選び方に依存しない。よって、 $\mathbf{R}P^n$ の部分集合 U_i を

$$U_i = \{\pi(x) \mid x = (x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}, x_i \neq 0\}$$

により定めることができる。

このとき、

$$\pi^{-1}(U_i) = \{(x_1, x_2, \dots, x_{n+1}) \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\} \mid x_i \neq 0\}$$

は $\mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ の開集合だから、商位相の定義より、 U_i は $\mathbf{R}P^n$ の開集合である。

次に、 U_i 上の局所座標系を定めよう。

$p \in U_i$ を (*) のように表しておく。

$j = 1, 2, \dots, n+1$ とすると、 x_i と x_j の比 $\frac{x_j}{x_i}$ は p の代表元 x の選び方に依存しない。よって、 U_i から \mathbf{R}^n への写像 φ_i を

$$\varphi_i(p) = \left(\frac{x_1}{x_i}, \dots, \frac{x_{i-1}}{x_i}, \frac{x_{i+1}}{x_i}, \dots, \frac{x_{n+1}}{x_i} \right)$$

により定めることができる.

このとき, φ_i は U_i から \mathbf{R}^n への同相写像となり,

$$\mathbf{R}P^n = \bigcup_{i=1}^{n+1} U_i.$$

したがって, $\mathbf{R}P^n$ は $\{(U_i, \varphi_i)\}_{i=1, \dots, n+1}$ を座標近傍系とする n 次元位相多様体となる.

更に, 座標変換について調べよう.

$p \in U_i \cap U_j, i < j$ とし,

$$\varphi_i(p) = (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n)$$

と表しておく.

このとき, $p \in U_j$ だから, $\xi_{j-1} \neq 0$ である.

また, (U_i, φ_i) から (U_j, φ_j) への座標変換

$$\varphi_j \circ \varphi_i^{-1} : \varphi_i(U_i \cap U_j) \rightarrow \varphi_j(U_i \cap U_j)$$

は

$$(\varphi_j \circ \varphi_i^{-1})(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \left(\frac{\xi_1}{\xi_{j-1}}, \dots, \frac{\xi_{i-1}}{\xi_{j-1}}, \frac{1}{\xi_{j-1}}, \frac{\xi_i}{\xi_{j-1}}, \dots, \frac{\xi_{j-2}}{\xi_{j-1}}, \frac{\xi_j}{\xi_{j-1}}, \dots, \frac{\xi_n}{\xi_{j-1}} \right)$$

によりあたえられ, これは C^∞ 級である.

以上より, $\mathbf{R}P^n$ は n 次元 C^∞ 級多様体である.

例 (開部分多様体)

M を n 次元 C^r 級多様体, N を M の開集合とする.

このとき, N は自然に n 次元 C^r 級多様体となる.

実際, N の位相としては M の位相から導かれる相対位相を考え, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系とすると, N の座標近傍系としては $\{(U_\alpha \cap N, \varphi_\alpha|_{U_\alpha \cap N})\}_{\alpha \in A}$ を考えればよい.

N を M の開部分多様体という.

例 (直積多様体)

M を m 次元 C^r 級多様体, N を n 次元 C^r 級多様体とする.

まず, 直積集合 $M \times N$ の直積位相を考える. すなわち, M, N の位相をそれぞれ $\mathfrak{D}_M, \mathfrak{D}_N$ とし, $M \times N$ の部分集合系 \mathfrak{B} を

$$\mathfrak{B} = \{U \times V \mid U \in \mathfrak{D}_M, V \in \mathfrak{D}_N\}$$

により定める. \mathfrak{B} を基底とする $M \times N$ の位相が直積位相である. このとき, $M \times N$ を M と N の直積空間という.

2つの Hausdorff 空間の直積空間は Hausdorff となることが分かる. よって, $M \times N$ は Hausdorff である.

更に, $M \times N$ は $(m+n)$ 次元 C^r 級多様体となる.

実際, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}, \{(V_\beta, \psi_\beta)\}_{\beta \in B}$ をそれぞれ M, N の座標近傍系とすると, $M \times N$ の座標近傍系は $\{(U_\alpha \times V_\beta, \varphi_\alpha \times \psi_\beta)\}_{(\alpha, \beta) \in A \times B}$ により定めればよい. ただし,

$$(\varphi_\alpha \times \psi_\beta)(p, q) = (\varphi_\alpha(p), \psi_\beta(q)) \quad ((p, q) \in U_\alpha \times V_\beta)$$

である.

$M \times N$ を M と N の直積多様体という.

問題 3

1. $m, n \in \mathbf{N}$, $m > n$ とする. U を \mathbf{R}^m の開集合, f を U で定義された \mathbf{R}^n に値をとる C^r 級関数とし,

$$M = \{x \in U \mid f(x) = 0\}$$

とおく. M が空でなく, 任意の $x \in M$ に対して

$$\text{rank } f'(x) = n$$

であると仮定する. このとき, 逆写像定理を用いることにより, M は $(m-n)$ 次元 C^r 級多様体となることが分かる.

このことを用いて, 次の (1)~(4) の集合 M が C^∞ 級多様体となることを示せ.

- (1) $M = \{x \in \mathbf{R}^n \mid \langle a, x \rangle = c\}$. ただし, $n \geq 2$ で, $a \in \mathbf{R}^n \setminus \{0\}$, $c \in \mathbf{R}$. なお, M を \mathbf{R}^n の超平面という.
- (2) $M = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$. ただし, $n \geq 1$. すなわち, M は n 次元球面.
- (3) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1x_4 - x_2x_3 = 1\}$.
 なお, M は行列式が 1 の 2 次実行列全体の集合と同一視することができる.
 一般に, 行列式が 1 の n 次実行列全体の集合を $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ などと表し, n 次実特殊線形群という. $\text{SL}(n, \mathbf{R})$ は $(n^2 - 1)$ 次元 C^∞ 級多様体となることが分かる.
- (4) $M = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4 \mid x_1^2 + x_2^2 = x_3^2 + x_4^2 = 1\}$. なお, M を Clifford トーラスという.

2. 正則な n 次実行列全体の集合を $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ などと表し, n 次実一般線形群という. $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ は n^2 次元 C^∞ 級多様体となることを示せ.

3. S^1 と S^1 の直積多様体を T^2 と表し, 2 次元トーラスという. T^2 から T^2 への写像 f を

$$f((x, y), (u, v)) = ((x, -y), (-u, -v)) \quad (((x, y), (u, v)) \in T^2)$$

により定め, $p, q \in T^2$ に対して $p = q$ または $p = f(q)$ のとき, $p \sim q$ と表すことにする. このとき, \sim は T^2 上の同値関係となることを示せ.

なお, 商集合 T^2 / \sim に同値類を対応させる自然な射影による商位相を考えると, T^2 / \sim は 2 次元 C^∞ 級多様体となる. T^2 / \sim を Klein の壺という.

また, $i = 1, 2, \dots, k$ に対して n_k 次元 C^r 級多様体 M_k があたえられているとき, 直積多様体 $M_1 \times M_2 \times \dots \times M_k$ が定められ, $(n_1 + n_2 + \dots + n_k)$ 次元 C^r 級多様体となる.

特に, S^1 の n 個の直積を T^n と表し, n 次元トーラスという.

問題 3 の解答

1. (1) \mathbf{R}^n で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = \langle a, x \rangle - c \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定めると,

$$M = \{x \in \mathbf{R}^n | f(x) = 0\}.$$

また,

$$f'(x) = {}^t a.$$

$a \neq 0$ だから,

$$\text{rank } f'(x) = 1.$$

よって, M は $(n-1)$ 次元 C^∞ 級多様体.

(2) \mathbf{R}^{n+1} で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = \|x\|^2 - 1 \quad (x \in \mathbf{R}^{n+1})$$

により定めると,

$$M = \{x \in \mathbf{R}^{n+1} | f(x) = 0\}.$$

また,

$$f'(x) = 2{}^t x.$$

$x \in M$ のとき, $x = 0$ となることはないから,

$$\text{rank } f'(x) = 1.$$

よって, M は n 次元 C^∞ 級多様体.

(3) \mathbf{R}^4 で定義された C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = x_1 x_4 - x_2 x_3 - 1 \quad (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4)$$

により定めると,

$$M = \{x \in \mathbf{R}^4 | f(x) = 0\}.$$

また,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} x_4 \\ -x_3 \\ -x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}.$$

$x \in M$ のとき,

$$x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$$

となることはないから,

$$\text{rank } f'(x) = 1.$$

よって, M は 3 次元 C^∞ 級多様体.

(4) \mathbf{R}^4 で定義された \mathbf{R}^2 に値をとる C^∞ 級関数 f を

$$f(x) = (x_1^2 + x_2^2 - 1, x_3^2 + x_4^2 - 1) \quad (x = (x_1, x_2, x_3, x_4) \in \mathbf{R}^4)$$

により定めると,

$$M = \{x \in \mathbf{R}^4 | f(x) = 0\}.$$

また,

$$f'(x) = \begin{pmatrix} 2x_1 & 0 \\ 2x_2 & 0 \\ 0 & 2x_3 \\ 0 & 2x_4 \end{pmatrix}.$$

$x \in M$ のとき, $x_1 \neq 0$ または $x_2 \neq 0$ で, 更に $x_3 \neq 0$ または $x_4 \neq 0$ だから,

$$\text{rank } f'(x) = 2.$$

よって, M は 2次元 C^∞ 級多様体.

2. まず, $M_n(\mathbf{R})$ を n 次実行列全体の集合とする.

$M_n(\mathbf{R})$ は自然に n^2 次元 Euclid 空間 \mathbf{R}^{n^2} と同一視することができるから, n^2 次元 C^∞ 級多様体である.

ここで, 行列式を対応させる関数は $M_n(\mathbf{R})$ で定義された連続関数で,

$$\text{GL}(n, \mathbf{R}) = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | |X| \neq 0\}.$$

よって, $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開集合.

したがって, $\text{GL}(n, \mathbf{R})$ は $M_n(\mathbf{R})$ の開部分多様体となるから, n^2 次元 C^∞ 級多様体である.

3. $p, q, r \in T^2$ とする.

まず, $p = p$ だから, $p \sim p$.

次に, $p \sim q$ とすると, $p = q$ または $p = f(q)$.

$p = q$ のとき, $q \sim p$.

$p = f(q)$ のとき,

$$\begin{aligned} f(p) &= f(f(q)) \\ &= q. \end{aligned}$$

よって, $q \sim p$.

更に, $p \sim q, q \sim r$ とすると, $p = q$ または $p = f(q)$ で, $q = r$ または $q = f(r)$.

$p = q, q = r$ のとき, $p = r$ だから, $p \sim r$.

$p = q, q = f(r)$ のとき, $p = f(r)$ だから, $p \sim r$.

$p = f(q), q = r$ のとき, $p = f(r)$ だから, $p \sim r$.

$p = f(q), q = f(r)$ のとき,

$$\begin{aligned} f(q) &= f(f(r)) \\ &= r \end{aligned}$$

だから, $p = r$.

よって, $p \sim r$.

したがって, \sim は T^2 上の同値関係.