

§6. 接ベクトルと接空間

多様体に対しても接ベクトルを考えることができる。

まず、 \mathbf{R}^n の接ベクトルの場合と同様に、単純に次のようなことを考えてみよう。

(M, \mathcal{S}) を n 次元 C^r 級多様体とする。ただし、 $r \geq 1$ とする。また、 $p \in M$ とし、 $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $p \in U$ となるように選んでおく。更に、 $\varepsilon > 0$ とし、

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

を $\gamma(0) = p$ で、像が U に含まれるような C^r 級曲線とする。

このとき、 \mathbf{R}^n の元

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi \circ \gamma) \quad (*)$$

が座標変換でどのように変わるのかを調べてみよう。

上の (U, φ) に加え、 $(V, \psi) \in \mathcal{S}$ も $p \in V$ となるように選んでおき、 γ の像は V にも含まれているとする。

このとき、

$$\psi \circ \gamma = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$$

だから、連鎖律より、

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\psi \circ \gamma) = \left(\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (\varphi \circ \gamma) \right) (J(\psi \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p)).$$

一般に、座標変換は恒等写像ではないから、その Jacobian は 1 とは異なり、(*) は座標近傍に依存する式となってしまふ。

よって、(*) を p における接ベクトルとして定義することはできない。

そこで、接ベクトルを微分作用素と対応させることによって定めよう。

f を p の近傍で定義された C^r 級関数とし、

$$v_\gamma(f) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

とおく。 f から $v_\gamma(f)$ への対応を γ に沿う $t = 0$ における方向微分という。また、 $v_\gamma(f)$ を f の $t = 0$ における γ 方向の微分係数という。これらは座標近傍には依存しない概念であることに注意しよう。

$v_\gamma(f)$ を座標近傍を用いて表してみよう。

φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく。

このとき、

$$f \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$$

だから、

$$v_\gamma(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \dot{x}_i(0).$$

このとき、次がなりたつ。

定理 M を C^r 級多様体とする. $p \in M$ とし, γ を $\gamma(0) = p$ となる 0 を含む开区間で定義された M 上の C^r 級曲線とする. $a, b \in \mathbf{R}$ とし, f, g を p の近傍で定義された C^r 級関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.

$$(1) v_\gamma(af + bg) = av_\gamma(f) + bv_\gamma(g).$$

$$(2) v_\gamma(fg) = v_\gamma(f)g(p) + f(p)v_\gamma(g).$$

更に, $i = 1, 2, \dots, n$ に対して f から $\frac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$ への対応を $\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と表すことにする. このとき,

$$v_\gamma(f) = \left(\sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) f = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0) \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

と表すことができる.

そこで, $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ に対して

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

を p における接ベクトルという. 特に, 上の v_γ は p の接ベクトルで,

$$v_\gamma = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と表すことができる.

M 上の曲線を用いなくとも, 接ベクトルは方向微分を定める. すなわち, f から

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

への対応を定めることができる.

p における接ベクトル全体の集合を $T_p M$ と表す. すなわち,

$$T_p M = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \mid a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である. $T_p M$ は自然にベクトル空間となる. $T_p M$ を p における接ベクトル空間または接空間という.

定理 $\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ は 1 次独立.

特に, これらは $T_p M$ の基底となり, $T_p M$ は n 次元ベクトル空間である.

証明 $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbf{R}$ に対して

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = 0$$

と仮定する.

このとき, f を p の近傍で定義された C^r 級関数とすると,

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0.$$

特に, $j = 1, 2, \dots, n$ とし, f を $f \circ \varphi^{-1} = x_j$ となるように選んでおくと, f は p の近傍で定義された C^r 級関数で,

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i} \right) (\varphi(p)) \\ &= \delta_{ij}. \end{aligned}$$

よって,

$$a_1 = a_2 = \dots = a_n = 0.$$

□

φ に加え, もう 1 つの局所座標系 ψ も考え,

$$\psi = (y_1, y_2, \dots, y_n)$$

と表しておく, 上の定理より,

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\}, \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right\}$$

はともに $T_p M$ の基底である. これらの基底に対する基底変換行列を求めよう.

定理 基底変換

$$\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \right)_p \right\} \rightarrow \left\{ \left(\frac{\partial}{\partial y_1} \right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2} \right)_p, \dots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n} \right)_p \right\}$$

の基底変換行列は $\left(\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) \right)$.

証明 求める基底変換行列を (p_{ij}) とおくと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j} \right)_p = \sum_{k=1}^n p_{kj} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} \right)_p.$$

よって, f を p の近傍で定義された C^r 級関数とすると,

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(p) = \sum_{k=1}^n p_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p).$$

特に, $i = 1, 2, \dots, n$ とし, f を $f \circ \varphi^{-1} = x_i$ となるように選んでおくと, f は p の近傍で定義された C^r 級関数で,

$$\begin{aligned} \frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) &= \sum_{k=1}^n p_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial x_k}(\varphi(p)) \\ &= p_{ij}. \end{aligned}$$

□

問題 6

1. M を C^r 級多様体とし, $p \in M$ とする. v を $C^r(M)$ から \mathbf{R} への写像とし, 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ および任意の $f, g \in C^r(M)$ に対して, 次の (i), (ii) がなりたつと仮定する.

$$(i) \quad v(af + bg) = av(f) + bv(g).$$

$$(ii) \quad v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

なお, $r = \infty$ のときは上のような v 全体の集合は $T_p M$ と同一視することができることが分かる.

(1) f を恒等的に 1 に等しい M 上の定数関数とする. このとき, $v(f) = 0$ であることを示せ.

(2) f を M 上の定数関数とする. このとき, $v(f) = 0$ であることを示せ.

(3) $f, g \in C^r(M)$ とし, p のある開近傍 U に対して

$$f|_U = g|_U$$

がなりたつとする. このとき, $v(f) = v(g)$ であることを示せ.

2. $0 < \theta_0 \leq \pi$ に対して

$$p = (\sin \theta_0, 0, \cos \theta_0)$$

とおく. このとき, $\varepsilon > 0$ とし, $\gamma(0) = p$ となる 2次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上の C^∞ 級曲線

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S^2$$

を

$$\gamma(t) = (\sin \theta_0 \cos t, \sin \theta_0 \sin t, \cos \theta_0) \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

により定める. また, $N = (0, 0, 1)$ とおき, φ を N を中心とする立体射影とする. すなわち,

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z} \right) \quad ((x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\})$$

である. このとき, φ は $S^2 \setminus \{N\}$ 上の局所座標系で, γ の像は $S^2 \setminus \{N\}$ に含まれる.

φ を

$$\varphi = (x_1, x_2)$$

と表しておく. p における接ベクトル v_γ を上の局所座標系を用いて表せ.

3. M を C^r 級多様体とし, $p \in M$ とする. 任意の $v \in T_p M$ に対して, $\gamma(0) = p$ となる C^r 級曲線

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

で, $v_\gamma = v$ となるものが存在することを示せ. ただし, ε は十分小さい正の数である.

問題6の解答

1. (1) (ii) において $f = g = 1$ とすると,

$$v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1v(1).$$

すなわち,

$$v(1) = v(1) + v(1).$$

よって,

$$v(1) = 0.$$

(2) $c \in \mathbf{R}$ とする.

(i) において

$$a = c, b = 0, f = 1$$

とすると,

$$v(c \cdot 1 + 0 \cdot g) = cv(1) + 0v(g).$$

よって, (1) より,

$$\begin{aligned} v(c) &= cv(1) \\ &= c \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(3) まず, p の開近傍 V と M 上の C^r 級関数 h で, 次の (a), (b) をみたすものが存在する.

(a) $\bar{V} \subset U.$

(b) $h(x) = 0$ ($x \in M \setminus U$), $0 \leq h(x) < 1$ ($x \in U \setminus \bar{V}$), $h(x) = 1$ ($x \in \bar{V}$).

このとき,

$$(f - g)h = 0.$$

よって, (2), (ii), (i) より,

$$\begin{aligned} 0 &= v((f - g)h) \\ &= v(f - g)h(p) + (f - g)(p)v(h) \\ &= (v(f) - v(g)) \cdot 1 + 0v(h) \\ &= v(f) - v(g). \end{aligned}$$

したがって,

$$v(f) = v(g).$$

2. $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ とすると,

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \gamma)(t) &= \varphi(\sin \theta_0 \cos t, \sin \theta_0 \sin t, \cos \theta_0) \\ &= \left(\frac{\sin \theta_0 \cos t}{1 - \cos \theta_0}, \frac{\sin \theta_0 \sin t}{1 - \cos \theta_0} \right). \end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned} v_\gamma &= \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\sin \theta_0 \cos t}{1 - \cos \theta_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{\sin \theta_0 \sin t}{1 - \cos \theta_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p \\ &= \frac{-\sin \theta_0 \sin 0}{1 - \cos \theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} \right)_p + \frac{\sin \theta_0 \cos 0}{1 - \cos \theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p \\ &= \frac{\sin \theta_0}{1 - \cos \theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_2} \right)_p. \end{aligned}$$

3. (U, φ) を $p \in U$ となる座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく.

このとき,

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p$$

と表すことができる.

ε は十分小さい正の数だから, $\gamma(0) = p$ となる C^r 級曲線

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow M$$

を

$$\varphi \circ \gamma = (x_1(p) + a_1 t, x_2(p) + a_2 t, \dots, x_n(p) + a_n t) \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

となるように定めることができる.

このとき,

$$\begin{aligned} v_\gamma &= \sum_{i=1}^n \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (x_i(p) + a_i t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \\ &= \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i} \right)_p \\ &= v. \end{aligned}$$