§1. 集合

集合は現代数学において必要不可欠な概念である. ここでは, 集合に関する基本的事項について簡単に述べておこう.
集合とはものの集まりのことである. しかし, ものの集まりといっても数学では集められるものがはっきり定まる必要がある.

例 自然数全体の集まりは集合である. 自然数全体の集合を $\mathbf{N}$ と表す.
これに対して例えば, かなり大きい自然数全体の集まりは集合とはいわない. 「かなり大きい」という言葉が曖昧ではっきりしないからである.

A が集合のとき, A を構成する１つ１つのものを A の要素または元という. a が A の元であることを記号で $a \in A$ または $A \ni a$ と表す. このとき, a は A に属する, a は A に含まれる, または A は a を含むという. a が A の元でないときは $a \notin A$ または $A \not\ni a$ と表す.

例 1 や 2 は自然数であるから,

$$1 \in \mathbf{N},\ \mathbf{N} \ni 2.$$

また, $\dfrac{1}{2}$ や -1 は自然数ではないから,

$$\frac{1}{2} \notin \mathbf{N},\ \mathbf{N} \not\ni -1.$$

日本では 0 は自然数ではないとすることが多い. よって,

$$0 \notin \mathbf{N}.$$

2 つの集合 A, B に対して, A のどの元も B に含まれ, B のどの元も A に含まれるとき, $A = B$ と表し, A と B は等しいという. $A = B$ でないときは $A \neq B$ と表す.
集合を表すには構成するすべての元を中括弧 $\{\ \}$ の中に書き並べる方法が１つに挙げられる. これを外延的記法という. 外延的記法において, 書き並べる元の順序は替えてもよい.

例 $\mathbf{N}$ の元を完全にすべて書き尽くすことはできないが,

$$\{1, 2, 3, \dots\}$$

と表せば, これは $\mathbf{N}$ と等しいと推察することができる. これが $\mathbf{N}$ の外延的記法による表し方である.

外延的記法は多くの元からなる集合を表すにはあまり向かない方法である. そこで, 集合を表すもう１つの方法として内包的記法が挙げられる. これはある条件 C をみたすもの全体の集合を

$$\{x | x \text{ は条件 } C \text{ をみたす}\}$$

と表す方法である.

例 整数全体の集合を $\mathbf{Z}$ と表すと,

$$\mathbf{Z} = \{x | x \text{ は整数}\}.$$

集合 A の元で, 更に条件 C をみたすもの全体の集合を

$$\{x | x \in A,\ x \text{ は条件 } C \text{ をみたす}\}$$

または

$$\{x \in A | x \text{ は条件 } C \text{ をみたす }\}$$

と表す.
元を 1 つも含まない集合は空集合といい, 外延的記法では { } と表すことができるが, $\emptyset$ と表すことが多い. この記号は数字の 0 にスラッシュ / を重ねたものに由来する.

例　有理数全体の集合を $\mathbf{Q}$ と表す.
$x^2 = 2$ となる有理数 x は存在しないことが背理法により証明することができるから,

$$\{x \in \mathbf{Q} | x^2 = 2\} = \emptyset.$$

元を有限個しか含まない集合を有限集合という. ただし, 空集合も有限集合とみなす. 有限集合でない集合を無限集合という.
2 つの集合に対して次のように包含関係を考えることができる.
集合 A のどの元も集合 B に含まれるとき, $A \subset B$ または $B \supset A$ と表し, A を B の部分集合という. また, A は B に含まれる, B は A を含むという. ただし, 空集合は任意の集合の部分集合とみなす. $A \subset B$ でないときは $A \not\subset B$ または $B \not\supset A$ と表す.

例 (区間)
実数全体の集合を $\mathbf{R}$ と表す.
次の (1)〜(4) により定められる $\mathbf{R}$ の部分集合を区間という.

(1) $(a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a < x < b\}$ ($a \in \mathbf{R}$ または $a = -\infty$, $b \in \mathbf{R}$ または $b = +\infty$).
(2) $[a, b) = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x < b\}$ ($a \in \mathbf{R}$, $b \in \mathbf{R}$ または $b = +\infty$).
(3) $(a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a < x \leq b\}$ ($a \in \mathbf{R}$ または $a = -\infty$, $b \in \mathbf{R}$).
(4) $[a, b] = \{x \in \mathbf{R} | a \leq x \leq b\}$ ($a, b \in \mathbf{R}$).

特に, $\mathbf{R} = (-\infty, +\infty)$ である. また, $a, b \in \mathbf{R}$ のときは $a < b$ としている. (1), (4) の区間をそれぞれ開区間, 閉区間というが, 特に $a, b \in \mathbf{R}$ のときはそれぞれ有界開区間, 有界閉区間ともいう.

例　複素数全体の集合を $\mathbf{C}$ と表す.
$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ に対して包含関係

$$\mathbf{N} \subset \mathbf{Z},\ \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \subset \mathbf{R},\ \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$$

がなりたつ.

A, B を集合とする. $A \subset B$ かつ $A \neq B$ のとき, $A \subsetneq B$ または $B \supsetneq A$ と表し, A を B の真部分集合という.

例　$\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}, \mathbf{C}$ の包含関係に関して, 更に

$$\mathbf{N} \neq \mathbf{Z},\ \mathbf{Z} \neq \mathbf{Q},\ \mathbf{Q} \neq \mathbf{R},\ \mathbf{R} \neq \mathbf{C}$$

だから, まとめて表すと,

$$\mathbf{N} \subsetneq \mathbf{Z} \subsetneq \mathbf{Q} \subsetneq \mathbf{R} \subsetneq \mathbf{C}.$$

集合 A の部分集合全体からなる集合を $\mathfrak{P}(A), 2^A$ などと表し, A の巾集合という.
A の巾集合を 2^A と表す理由は次による.

定理　A を n 個の元からなる有限集合とすると, A の巾集合は 2^n 個の元からなる.

証明　$k=0,1,2,\ldots,n$ とすると, n 個のものから k 個のものを選ぶ組み合わせは ${}_nC_k$ 通りであることに注意し, 2 項展開を用いればよい. □

例　$A=\{1,2\}$ のとき,

$$2^A=\{\emptyset,\ \{1\},\ \{2\},\ \{1,2\}\}.$$

集合に対していろいろな演算を考えることができる.
A,B を集合とする. このとき, 集合 $A\cup B, A\cap B, A\setminus B$ を

$$A\cup B=\{x|x\in A \text{ または } x\in B\},$$
$$A\cap B=\{x|x\in A \text{ かつ } x\in B\},$$
$$A\setminus B=\{x|x\in A \text{ かつ } x\notin B\}$$

により定め, それぞれ A と B の和集合, 共通部分, 差集合という. $A\setminus B$ は $A-B$ とも表す.
$A\cap B\neq\emptyset$ のとき, A と B は交わるという. A と B が交わらないとき, $A\cup B$ を A と B の直和という.

例　集合 A,B を

$$A=\{1,2\},\ B=\{2,3\}$$

により定めると,

$$A\cup B=\{1,2,3\},\ A\cap B=\{2\},\ A\setminus B=\{1\},\ B\setminus A=\{3\}.$$

特に, A と B は交わる.

和集合や共通部分を取るという演算は交換律, 結合律, 分配律をみたす. 順に述べていこう.

交換律　A,B を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $A\cup B=B\cup A$.
(2) $A\cap B=B\cap A$.

結合律　A,B,C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$.
(2) $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$.

注意　和集合に関する結合律より, $(A\cup B)\cup C$ および $A\cup(B\cup C)$ はともに

$$A\cup B\cup C$$

と表しても構わない.
更に, 和集合に関する交換律より,

$$A\cup B\cup C=A\cup C\cup B=B\cup A\cup C=B\cup C\cup A=C\cup A\cup B=C\cup B\cup A.$$

共通部分についても同様である.

分配律　A,B,C を集合とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(A\cup B)\cap C=(A\cap C)\cup(B\cap C)$.
(2) $(A\cap B)\cup C=(A\cup C)\cap(B\cup C)$.

問題 1

1. 次の (1), (2) の内包的記法により表された集合 A を外延的記法により表せ.

(1) $A = \{n \in \mathbf{N} | n$ は 10 以下の素数 $\}$.

(2) $A = \{X | X$ は正則な巾零行列 $\}$.

2. 次の (1), (2) により定められる集合 A が有限集合か無限集合であるかを調べよ.

(1) $A = \{a \in \mathbf{R} |$ 関数 $f(x)$ は $x = a$ で極値をとる $\}$. ただし, $f(x)$ は x の 1 次以上の多項式.

(2) $A = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \middle| a, b, c, d \in \mathbf{R}, \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 \text{ は零行列} \right\}$.

3. A を正の偶数全体の集合, B を正の奇数全体の集合, C を素数全体の集合とする. 次の (1)〜(6) の集合を求めよ.

(1) $A \cup B$.

(2) $A \cap B$.

(3) $A \cap C$.

(4) $A \setminus B$.

(5) $B \setminus A$.

(6) $C \setminus B$.

4. n 次実行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表すことにする. $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 S, A を

$$S = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X \text{ は実対称行列, すなわち } {}^tX = X\},$$
$$A = \{X \in M_n(\mathbf{R}) | X \text{ は実交代行列, すなわち } {}^tX = -X\}$$

により定める.

(1) $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると,

$$\frac{1}{2}(X + {}^tX) \in S, \ \frac{1}{2}(X - {}^tX) \in A$$

であることを示せ.

(2) $M_n(\mathbf{R})$ の部分集合 $S + A$ を

$$S + A = \{X + Y | X \in S, \ Y \in A\}$$

により定める. $S + A = M_n(\mathbf{R})$ であることを示せ.

(3) $S \cap A$ を求めよ.

問題 1 の解答

1. (1) 10 以下の素数は $2, 3, 5, 7$ だから,

$$A = \{2, 3, 5, 7\}.$$

(2) X を正則な巾零行列とする.
X は巾零だから,

$$X^n = O$$

となる $n \in \mathbf{N}$ が存在する. ただし, O は零行列.
X は正則だから, 上の式の両辺に左から X^{-1} を $(n-1)$ 回掛けると,

$$X = O.$$

これは X が正則であることに矛盾.
よって, A は空集合で,

$$A = \{\ \}.$$

2. (1) 関数 $f(x)$ の極値をあたえる点の候補は方程式 $f'(x) = 0$ の解.
$f'(x)$ は x の多項式で 0 ではないから, 上の方程式の解は有限個.
よって, A は有限集合.

(2) A の元の 2 乗を計算すると,

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & b(a+d) \\ c(a+d) & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

だから,

$$a^2 + bc = 0,\ b(a+d) = 0,\ c(a+d) = 0,\ bc + d^2 = 0.$$

$a + d \neq 0$ のとき, 第 2 式と第 3 式より,

$$b = c = 0.$$

更に, 第 1 式と第 4 式より,

$$a = d = 0.$$

これは $a + d \neq 0$ に矛盾.
$a + d = 0$ のとき, $d = -a$ で, 第 1 式と第 4 式はともに

$$a^2 + bc = 0.$$

この式をみたす $a, b, c \in \mathbf{R}$ は無限に存在するから, A は無限集合.

3. (1) $A \cup B = \mathbf{N}$.
(2) $A \cap B = \emptyset$.
(3) $A \cap C = \{2\}$.
(4) $A \setminus B = A$.
(5) $B \setminus A = B$.
(6) $C \setminus B = \{2\}$.

4. (1) まず,

$$
\begin{aligned}
{}^t\left\{\frac{1}{2}(X+{}^tX)\right\} &= \frac{1}{2}{}^t(X+{}^tX) \\
&= \frac{1}{2}({}^tX+{}^{tt}X) \\
&= \frac{1}{2}({}^tX+X) \\
&= \frac{1}{2}(X+{}^tX).
\end{aligned}
$$

よって,

$$\frac{1}{2}(X+{}^tX) \in S.$$

次に,

$$
\begin{aligned}
{}^t\left\{\frac{1}{2}(X-{}^tX)\right\} &= \frac{1}{2}{}^t(X-{}^tX) \\
&= \frac{1}{2}({}^tX-{}^{tt}X) \\
&= \frac{1}{2}({}^tX-X) \\
&= -\frac{1}{2}(X-{}^tX).
\end{aligned}
$$

よって,

$$\frac{1}{2}(X-{}^tX) \in A.$$

(2) まず, $S+A$ の定義より,

$$S+A \subset M_n(\mathbf{R}).$$

次に, $X \in M_n(\mathbf{R})$ とすると, (1) より,

$$X = \frac{1}{2}(X+{}^tX) + \frac{1}{2}(X-{}^tX) \in S+A.$$

よって,

$$M_n(\mathbf{R}) \subset S+A.$$

したがって,

$$S+A = M_n(\mathbf{R}).$$

(3) $X \in S \cap A$ とすると, $X \in S$ かつ $X \in A$ だから,

$$
\begin{aligned}
X &= {}^tX \\
&= -X.
\end{aligned}
$$

よって,

$$X = O.$$

したがって,

$$S \cap A = \{O\}.$$