§2. 写像

集合と同様に現代数学において必要不可欠な概念である写像に関する基本的事項について簡単に述べておこう.
A, B を集合とし, A の任意の元に対して B の元を対応させる規則 f があたえられているとする. このことを

$$f : A \to B$$

と表し, f を A から B への写像, A を f の定義域, B を f の値域という. 値域が $\mathbf{R}$ や $\mathbf{C}$ の場合は f を関数ということが多い.
また, 写像 f によって $a \in A$ に $b \in B$ が対応するとき, $b = f(a)$ と表す. このとき, b を f による a の像, a を f による b の原像または逆像という.

例 1 変数の微分積分では区間で定義された関数を考えることが多い. 区間 I で定義された実数値関数 f は

$$f : I \to \mathbf{R}$$

と表すことができる.

$f, \tilde{f}$ をともに A から B への写像とし, 任意の $a \in A$ に対して $f(a) = \tilde{f}(a)$ がなりたつとき, $f = \tilde{f}$ と表し, f と $\tilde{f}$ は等しいという. $f = \tilde{f}$ でないときは $f \neq \tilde{f}$ と表す.
写像に対してグラフというものを対応させることができる. 例えば, 1 変数関数のグラフであれば, 高等学校においてもある程度親しんでいることであろうが, 一般の写像に対してもグラフを定義するために 2 つの集合の直積について述べよう.
2 つの集合 A, B に対して A の元 a と B の元 b の組 (a, b) 全体からなる集合を $A \times B$ と表し, A と B の直積という. ただし, 上の組は順序も込みで考えたもので, $(a, b), (a', b') \in A \times B$ に対して $(a, b) = (a', b')$ となるのは $a = a'$ かつ $b = b'$ のときであるとする.

例 集合 A, B を

$$A = \{1, 2\},\ B = \{3, 4, 5\}$$

により定めると,

$$A \times B = \{(1,3), (1,4), (1,5), (2,3), (2,4), (2,5)\},$$

$$B \times A = \{(3,1), (3,2), (4,1), (4,2), (5,1), (5,2)\},$$

$$A \times A = \{(1,1), (1,2), (2,1), (2,2)\},$$

$$B \times B = \{(3,3), (3,4), (3,5), (4,3), (4,4), (4,5), (5,3), (5,4), (5,5)\}.$$

例えば, $A \times A$ の 2 つの元 $(1, 2)$ と $(2, 1)$ は異なるものとみなすことに注意しよう.

A から B への写像 f に対して $A \times B$ の部分集合 $G(f)$ を

$$G(f) = \{(a, f(a)) | a \in A\}$$

により定め, $G(f)$ を f のグラフという.

例 $\mathbf{R}$ と $\mathbf{R}$ の直積 $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ は $\mathbf{R}^2$ と表し, 平面とみなすことが多い.
区間 I で定義された実数値関数 f のグラフは

$$G(f) = \{(x, f(x)) | x \in I\}$$

で, f が連続な場合は $G(f)$ は平面上の曲線とみなすことができる.

f を A から B への写像とする. A の部分集合 A_1 に対して B の部分集合 $f(A_1)$ を

$$f(A_1) = \{f(a) | a \in A_1\}$$

により定め, $f(A_1)$ を f による A_1 の像という.
また, B の部分集合 B_1 に対して A の部分集合 $f^{-1}(B_1)$ を

$$f^{-1}(B_1) = \{a \in A | f(a) \in B_1\}$$

により定め, $f^{-1}(B_1)$ を f による B_1 の原像または逆像という.
写像に関する基本的概念として全射および単射というものが挙げられる.
A, B を集合, f を A から B への写像とする. 任意の $b \in B$ に対して $b = f(a)$ となる $a \in A$ が存在するとき, f を A から B への上への写像または全射という.
また, $a_1, a_2 \in A$, $a_1 \neq a_2$ ならば $f(a_1) \neq f(a_2)$ となるとき, f を A から B への 1 対 1 の写像または単射という. 対偶を取ると, 単射は $f(a_1) = f(a_2)$ ならば, $a_1 = a_2$ ということである.
全射かつ単射な写像を全単射という.

例　$\mathbf{R}$ で定義された実数値関数 $f_1, f_2, \ldots, f_5$ を

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = x^2,\ f_3(x) = x^3,\ f_4(x) = x^3 - x,\ f_5(x) = e^x\ (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, f_1 は全単射, f_2 は全射でも単射でもない, f_3 は全単射, f_4 は全射であるが単射ではない, f_5 は単射であるが全射ではない.

例 (包含写像, 恒等写像)
A が B の部分集合のとき, A から B への写像 ι を

$$\iota(a) = a \quad (a \in A)$$

により定めることができる. このとき, 明らかに ι は単射である. ι を A から B への包含写像という. 特に, $A = B$ のときは ι を A の上の恒等写像という. これを 1_A と表すことにする.

集合 A, B に加え, 更に集合 C を考え, f を A から B への写像, g を B から C への写像とすると, A から C への写像 $g \circ f$ を

$$(g \circ f)(a) = g(f(a)) \quad (a \in A)$$

により定めることができる. $g \circ f$ を f と g の合成写像という. 1 変数の微分積分において扱われる合成関数は合成写像の例である.
写像の合成は結合律をみたす. すなわち, 次がなりたつ.

結合律　A, B, C, D を集合, f を A から B への写像, g を B から C への写像, h を C から D への写像とすると,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

証明　$a \in A$ とすると,

$$\begin{aligned}(h \circ (g \circ f))(a) &= h((g \circ f)(a)) \\ &= h(g(f(a))) \\ &= (h \circ g)(f(a)) \\ &= ((h \circ g) \circ f)(a).\end{aligned}$$

よって,

$$h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f.$$

$\square$

定理　f を A から B への写像, g を B から C への写像とする. f, g がともに全射ならば, $g \circ f$ も全射.
また, f, g がともに単射ならば, $g \circ f$ も単射.
特に, f, g がともに全単射ならば, $g \circ f$ も全単射.

A から B への写像 f が全単射であるとする. このとき, 任意の $b \in B$ に対して $b = f(a)$ となる $a \in A$ が一意的に存在する. b に a を対応させる規則を f^{-1} と表し, f の逆写像という. f^{-1} は B から A への写像で, 全単射である. 特に, f^{-1} の逆写像は f である.

例　1 変数の微分積分において扱われる逆関数は逆写像の例である.
例えば, $a > 0, a \neq 1$ とすると, $\mathbf{R}$ から区間 $(0, +\infty)$ への写像として定義される指数関数 $f(x) = a^x$ は全単射で, 逆関数は $(0, +\infty)$ から $\mathbf{R}$ への写像として定義される対数関数 $f^{-1}(y) = \log_a y$ である.
その他に逆関数として定義される関数の中でも, 次に述べる逆三角関数は重要である.
区間 $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ から区間 $[-1, 1]$ への写像として定義される正弦関数 $f(x) = \sin x$ は全単射で, 逆関数は $[-1, 1]$ から $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ への写像として定義される. この逆関数を $f^{-1}(y) = \sin^{-1} y$ と表すことにする.
区間 $[0, \pi]$ から区間 $[-1, 1]$ への写像として定義される余弦関数 $f(x) = \cos x$ は全単射で, 逆関数は $[-1, 1]$ から $[0, \pi]$ への写像として定義される. この逆関数を $f^{-1}(y) = \cos^{-1} y$ と表すことにする.
区間 $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ から $\mathbf{R}$ への写像として定義される正接関数 $f(x) = \tan x$ は全単射で, 逆関数は $\mathbf{R}$ から $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ への写像として定義される. この逆関数を $f^{-1}(y) = \tan^{-1} y$ と表すことにする.

定理　f を A から B への写像, g を B から A への写像とする. $f \circ g = 1_B$ ならば, f は全射で g は単射.
特に, $f \circ g = 1_B$ かつ $g \circ f = 1_A$ ならば, f, g は全単射で, g, f はそれぞれ f, g の逆写像.

証明　まず, $b \in B$ とすると, $f \circ g = 1_B$ だから,

$$\begin{aligned} f(g(b)) &= (f \circ g)(b) \\ &= 1_B(b) \\ &= b. \end{aligned}$$

よって, f は全射.
次に,

$$g(b_1) = g(b_2) \quad (b_1, b_2 \in B)$$

とすると,

$$\begin{aligned} b_1 &= f(g(b_1)) \\ &= f(g(b_2)) \\ &= b_2. \end{aligned}$$

よって, g は単射. $\square$

問題 2

1. f, g を閉区間 $[a, b]$ で定義された実数値連続関数とする．f, g が

$$f(a) \leq g(a),\ f(b) \geq g(b)$$

をみたすならば, $G(f)$ と $G(g)$ は交わることを示せ.

2. 区間 I および I で定義された関数 f を次の (1)〜(4) のように定める．$f(I)$ および $f^{-1}(\{0\})$ を求めよ.

(1) $I = \mathbf{R}$, $f(x) = x^n$ $(x \in I)$. ただし, $n \in \mathbf{N}$.

(2) $I = \mathbf{R}$, $f(x) = \sin x$ $(x \in I)$.

(3) $I = [0, \pi]$, $f(x) = \cos x$ $(x \in I)$.

(4) $I = \left(-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right)$, $f(x) = \tan x$ $(x \in I)$.

3. A を集合, f を A から A 自身への写像とし, $n \in \mathbf{N}$ に対して A から A 自身への写像 f^n を

$$f^1 = f,\ f^n = f \circ f^{n-1}\ (n = 2, 3, 4, \dots)$$

により定める．A が有限集合ならば, $f^n(a) = a$ となる $n \in \mathbf{N}$ および $a \in A$ が存在することを示せ.

4. 双曲線関数

$$\sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2},\ \cosh x = \frac{e^x + e^{-x}}{2},\ \tanh x = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

をそれぞれ次の (1)〜(3) の区間 I から区間 J への写像と考えると, 逆関数が存在することが分かる．これらの逆関数をそれぞれ $\sinh^{-1} y$, $\cosh^{-1} y$, $\tanh^{-1} y$ と表すことにする．$\sinh^{-1} y$, $\cosh^{-1} y$, $\tanh^{-1} y$ を具体的に表せ.

(1) $I = \mathbf{R}$, $J = \mathbf{R}$.

(2) $I = [0, +\infty)$, $J = [1, +\infty)$.

(3) $I = \mathbf{R}$, $J = (-1, 1)$.

問題 2 の解答

1. 関数 $h(x)$ を

$$h(x) = f(x) - g(x) \quad (x \in [a, b])$$

により定めると, 仮定より, $h(x)$ は $[a, b]$ で連続で,

$$h(a) \leq 0,\ h(b) \geq 0.$$

$h(a) = 0$ のとき,

$$(a, f(a)) = (a, g(a)) \in G(f) \cap G(g).$$

$h(b) = 0$ のとき,

$$(b, f(b)) = (b, g(b)) \in G(f) \cap G(g).$$

$h(a) < 0$ かつ $h(b) > 0$ のとき, 中間値の定理より, $h(c) = 0$ となる $c \in [a, b]$ が存在する.
よって,

$$(c, f(c)) = (c, g(c)) \in G(f) \cap G(g).$$

したがって, $G(f)$ と $G(g)$ は交わる.

2. (1) n が偶数のとき,

$$f(I) = [0, +\infty).$$

n が奇数のとき,

$$f(I) = \mathbf{R}.$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

(2) まず,

$$f(I) = [-1, 1].$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \{n\pi | n \in \mathbf{Z}\}.$$

(3) まず,

$$f(I) = [-1, 1].$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \left\{\frac{\pi}{2}\right\}.$$

(4) まず,

$$f(I) = \mathbf{R}.$$

また,

$$f^{-1}(\{0\}) = \{0\}.$$

3. A は有限集合だから,

$$A = \{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$$

と表すことができる.
このとき, $(m+1)$ 個の元 $f^1(a_1), f^2(a_1), \ldots, f^{m+1}(a_1)$ のうち少なくとも 2 つは等しいから,
$i < j$ となる $i, j \in \{1, 2, \ldots, m+1\}$ が存在し

$$f^i(a_1) = f^j(a_1).$$

よって,

$$a = f^i(a_1),\ n = j - i$$

とおくと,

$$\begin{aligned} f^n(a) &= f^{j-i}(f^i(a_1)) \\ &= f^j(a_1) \\ &= f^i(a_1) \\ &= a. \end{aligned}$$

4. (1) まず,

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

とおくと,

$$(e^x)^2 - 2ye^x - 1 = 0.$$

$e^x > 0$ だから,

$$\begin{aligned} e^x &= y \pm \sqrt{y^2+1} \\ &= y + \sqrt{y^2+1}. \end{aligned}$$

よって,

$$\sinh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2+1}).$$

(2) まず,

$$y = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

とおくと,

$$(e^x)^2 - 2ye^x + 1 = 0.$$

$e^x \geq 1$ だから,

$$\begin{aligned} e^x &= y \pm \sqrt{y^2-1} \\ &= y + \sqrt{y^2-1}. \end{aligned}$$

よって,

$$\cosh^{-1} y = \log(y + \sqrt{y^2-1}).$$

(3) まず,

$$y = \frac{\sinh x}{\cosh x}$$

とおくと,

$$y = \frac{e^{2x} - 1}{e^{2x} + 1}.$$

すなわち,

$$(1 - y)(e^x)^2 = 1 + y.$$

よって,

$$\tanh^{-1} y = \frac{1}{2} \log \frac{1+y}{1-y}.$$