§3. 2 項関係

数学では 1 つの集合に含まれる 2 つの元がある関係をみたすかみたさないかを問題にすることが多く, このような関係を一般に 2 項関係という. 中でも同値関係と順序関係が重要である.
A を集合とし, $A \times A$ の任意の元に対して, みたすかみたさないかを判定できる規則 R があたえられているとする. このとき, R を A 上の 2 項関係という. $(a, b) \in A \times A$ が R をみたすとき, aRb と表すことにする.
A 上の 2 項関係 R に対して $A \times A$ の部分集合 $G(R)$ を

$$G(R) = \{(a, b) \in A \times A | aRb\}$$

により定める. $G(R)$ を R のグラフという.
R は $G(R)$ と同一視することができる. よって, $A \times A$ の部分集合をあたえることにより, それをグラフとする 2 項関係を定めることができる.
2 項関係に関して次の 4 つの性質を考えることが多い.

定義　A を集合, R を A 上の 2 項関係とし, $a, b, c \in A$ とする.
任意の a に対して aRa となるとき, R は反射律をみたすという.
aRb ならば bRa となるとき, R は対称律をみたすという.
aRb かつ bRc ならば aRc となるとき, R は推移律をみたすという.
aRb かつ bRa ならば $a = b$ となるとき, R は反対称律をみたすという.

2 項関係の中でも重要な同値関係と順序関係について, 順に述べていこう.
A を集合, R を A 上の 2 項関係とする. R は反射律, 対称律, 推移律をみたすとき, 同値関係という.
R が同値関係のとき, aRb となる $a, b \in A$ に対して a と b は同値であるという.
同値関係は $\sim$ という記号を用いることが多い.
次の例は最も原始的な同値関係と言えるであろう.

例 (相等関係)
A を集合とし, $a, b \in A$ に対して $a = b$ のとき, aRb と定める. すなわち, R は A の元の間の相等関係である.
このとき, 明らかに R は A 上の同値関係.

次の例も馴染み深いはずのものである.

例 (自然数 n を法とする合同)
$n \in \mathbf{N}$ を固定しておき, $a, b \in \mathbf{Z}$ とする. a, b が n を法として合同なとき, すなわち $a - b$ が n で割り切れるとき, aRb と定める. このとき, R は $\mathbf{Z}$ 上の同値関係となる. この場合, aRb は

$$a \equiv b \mod n$$

などと表すことが多い.

A を集合, R を A 上の同値関係とする. $a \in A$ に対して A の部分集合 $C(a)$ を

$$C(a) = \{x \in A | aRx\}$$

により定める. $C(a)$ を R による a の同値類, $C(a)$ の各元を $C(a)$ の代表という.
推移律より, $a, b \in A$ に対して $C(a) \cap C(b) \neq \emptyset$ ならば, $C(a) = C(b)$ である. 更に, 反射律より, R による同値類全体は A を互いに交わらない部分集合の和に分解する.

R による同値類全体の集合を A/R と表し, A の R による商集合という.
$a \in A$ に $C(a) \in A/R$ を対応させると, この対応は A から A/R への全射を定める. この写像を自然な射影という.

例 上の 2 つめの例において, $n = 2$ のとき, 同値類は偶数全体の集合と奇数全体の集合である.

次のような極端な同値関係を考えることもできる.

例 A を集合とし, 任意の $a, b \in A$ に対して aRb と定める. このとき, 明らかに R は A 上の同値関係.
商集合 A/R は A のみからなる.

A を集合, R を A 上の 2 項関係とする. R は反射律, 反対称律, 推移律をみたすとき, 順序関係という.
R が順序関係のとき, 組 (A, R) を順序集合という. R がはっきりしている場合は (A, R) を単に A と表す.
(A, R) が順序集合で, 任意の $a, b \in A$ に対して aRb または bRa となるとき, (A, R) を全順序集合という.
順序集合を全順序集合と区別するために半順序集合という場合もある.

例 (大小関係)
通常の大小関係 $\leq$ に関して $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}, \mathbf{R}$ は全順序集合となる.

例 (包含関係)
A を集合とすると, 包含関係 $\subset$ は 2^A 上の順序関係を定める.
一般に $(2^A, \subset)$ は全順序集合ではない.

順序関係は $\leq$ という記号を用いることが多い. このとき, $a \leq b$ を $b \geq a$ とも表す.
$(A, \leq)$ を順序集合とし, $a, b \in A$ とする.
$a \leq b$ のとき, a は b 以下である, または b は a 以上であるという.
$a \leq b$ かつ $a \neq b$ のとき, $a < b$ と表し, a は b より小さい, または b は a より大きいという.
任意の $x \in A$ に対して $x \leq a$ となるとき, $a = \max A$ と表し, a を A の最大元という.
任意の $x \in A$ に対して $a \leq x$ となるとき, $a = \min A$ と表し, a を A の最小元という.
反対称律より, 最大元, 最小元は存在するならば一意的である.
$a < x$ となる $x \in A$ が存在しないとき, a を A の極大元という.
$x < a$ となる $x \in A$ が存在しないとき, a を A の極小元という.
A の極大元は存在しても一意的とは限らないが, $\max A$ が存在するならば, それは A の一意的な極大元となる. 極小元についても同様である.

例 (整除関係)
A を 2 以上の自然数全体の集合とし, 整除関係を考える. すなわち, $a, b \in A$ に対して b が a で割り切れるとき, $a|b$ と表す. このとき, $(A, |\ )$ は順序集合となる.
A の最大元および極大元は存在しない.
また, 任意の A の元を割り切る A の元は存在しないから, A の最小元は存在しない.
しかし, 任意の素数は A の極小元.

$(A, \leq)$ を順序集合, M を A の部分集合とし, $a \in A$ とする.
任意の $x \in M$ に対して $x \leq a$ となるとき, a を M の A における上界という.
M の上界が存在するとき, M は A において上に有界であるという.
M の上界全体の集合が最小元をもつとき, その元を $\sup M$ と表し, M の A における上限という.

任意の $x \in M$ に対して $a \leq x$ となるとき, a を M の A における下界という.
M の下界が存在するとき, M は A において下に有界であるという.
M の下界全体の集合が最大元をもつとき, その元を $\inf M$ と表し, M の A における下限という.

例 $\mathbf{R}$ 上の大小関係を考え, $a < b$ となる $a, b \in \mathbf{R}$ に対して $M = (a, b]$ とおく.
このとき,

$$\max M = \sup M = b.$$

また, $\min M$ は存在しないが, $\inf M = a$.

例 $\mathbf{Q}$ 上の大小関係を考え,

$$M = \{x \in \mathbf{Q} | x > 0 \text{ かつ } x^2 > 2\}$$

とおく.
このとき, A の上界全体の集合は空集合だから, $\sup M$ は存在しない.
また, M の下界全体の集合は

$$\{x \in \mathbf{Q} | x < 0 \text{ または } x^2 < 2\}.$$

しかし, $\inf M$ は存在しない.
更に, $\max M$ および $\min M$ は存在しない.

次の定理は実数の連続性という性質に他ならない.

Weierstrass の定理 M を $\mathbf{R}$ の空でない部分集合とする.
M の上界が存在するならば, $\sup M$ が存在する.
M の下界が存在するならば, $\inf M$ が存在する.

最後に, 順序同型について述べておこう.
$(A, \leq), (A', \leq')$ を順序集合, f を A から A' への写像とする.
任意の $a, b \in A$ に対して $a \leq b$ ならば $f(a) \leq' f(b)$ となるとき, f は順序を保つという.
A から A' への全単射 f が存在し f と f^{-1} がともに順序を保つとき,

$$(A, \leq) \simeq (A', \leq')$$

と表すことにする. このとき, f を順序同型写像といい, $(A, \leq)$ と $(A', \leq')$ は順序同型であるという.
順序同型に関して次がなりたつ.

定理 $(A, \leq), (A', \leq'), (A'', \leq'')$ を順序集合とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $(A, \leq) \simeq (A, \leq)$.
(2) $(A, \leq) \simeq (A', \leq')$ ならば, $(A', \leq') \simeq (A, \leq)$.
(3) $(A, \leq) \simeq (A', \leq')$ かつ $(A', \leq') \simeq (A'', \leq'')$ ならば, $(A, \leq) \simeq (A'', \leq'')$.

例 $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ 上の大小関係を考える.
まず, $\mathbf{N}$ には最小元 1 が存在するが, $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ の最小元は存在しないから, $\mathbf{N}$ は $\mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ と順序同型ではない.
次に, 0 と 1 の間に $\mathbf{Z}$ の元は存在しないが $\mathbf{Q}$ の元は存在するから, $\mathbf{Z}$ は $\mathbf{Q}$ と順序同型ではない.
よって, 大小関係に関して $\mathbf{N}, \mathbf{Z}, \mathbf{Q}$ は互いに順序同型ではない.

問題 3

1. $A = \mathbf{Z} \times (\mathbf{Z} \setminus \{0\})$ とおき, $(m,n),(m',n') \in A$ に対して $mn' = nm'$ のとき, $(m,n)R(m',n')$ と定める. R は A 上の同値関係であることを示せ.

2. I を 0 を含む開区間, A を I で定義された正の値をとる関数全体の集合とし, $f, g \in A$ に対して

$$\lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$$

のとき, $f \sim g$ と定める. $\sim$ は A 上の同値関係であることを示せ.

3. 実数を成分とする n 次の正方行列全体の集合を $M_n(\mathbf{R})$ と表すことにする. $A, B \in M_n(\mathbf{R})$ に対して $B = P^{-1}AP$ となる n 次の正則行列 P が存在するとき, $A \sim B$ と定める. なお, このとき A と B は相似であるという. $\sim$ は $M_n(\mathbf{R})$ 上の同値関係であることを示せ.

4. X を集合とし, 2^X 上の包含関係を考える. f を 2^X から 2^X への順序を保つ写像とすると, $f(A_0) = A_0$ となる $A_0 \in 2^X$ が存在することを示せ.

問題 3 の解答

1. $(m,n),(m',n'),(m'',n'')\in A$ とする.
まず, $mn=nm$ だから, $(m,n)R(m,n)$.
よって, R は反射律をみたす.
次に, $(m,n)R(m',n')$ とすると, $mn'=nm'$.
よって, $m'n=n'm$ だから, $(m',n')R(m,n)$.
したがって, R は対称律をみたす.
更に, $(m,n)R(m',n')$ かつ $(m',n')R(m'',n'')$ とすると,

$$mn'=nm',\ m'n''=n'm''.$$

2 式を掛けると,

$$mn'm'n''=nm'n'm''.$$

$n'\neq 0$ に注意すると, $mn''=nm''$.
よって, $(m,n)R(m'',n'')$ だから, R は推移律をみたす.
以上より, R は A 上の同値関係.

2. $f,g,h\in A$ とする.
まず,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{f(x)}=1$$

だから, $f\sim f$.
よって, $\sim$ は反射律をみたす.
次に, $f\sim g$ とすると,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=1.$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{f(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{1}{\frac{f(x)}{g(x)}}\\&=\frac{1}{\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}}\\&=1\end{aligned}$$

だから, $g\sim f$.
したがって, $\sim$ は対称律をみたす.
更に, $f\sim g$ かつ $g\sim h$ とすると,

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)}=1.$$

よって,

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{h(x)}&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\frac{g(x)}{h(x)}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}\lim_{x\to 0}\frac{g(x)}{h(x)}\\&=1\end{aligned}$$

だから, $f \sim h$.
したがって, $\sim$ は推移律をみたす.
以上より, $\sim$ は A 上の同値関係.

3. $A, B, C \in M_n(\mathbf{R})$ とする.
まず, E を n 次単位行列とすると, E は正則で,

$$A = E^{-1}AE.$$

よって, $A \sim A$ だから, $\sim$ は反射律をみたす.
次に, $A \sim B$ とすると, $B = P^{-1}AP$ となる n 次の正則行列 P が存在する.
このとき, P^{-1} は正則で,

$$A = (P^{-1})^{-1}BP^{-1}.$$

よって, $B \sim A$ だから, $\sim$ は対称律をみたす.
更に, $A \sim B$ かつ $B \sim C$ とすると, $B = P^{-1}AP$, $C = Q^{-1}BQ$ となる n 次の正則行列 P, Q が存在する.
このとき, PQ は正則で,

$$\begin{aligned} C &= Q^{-1}(P^{-1}AP)Q \\ &= (PQ)^{-1}A(PQ). \end{aligned}$$

よって, $A \sim C$ だから, $\sim$ は推移律をみたす.
以上より, $\sim$ は $M_n(\mathbf{R})$ 上の同値関係.

4. 2^X の部分集合 $\mathfrak{A}$ を

$$\mathfrak{A} = \{A \in 2^X | f(A) \subset A\}$$

により定める.
まず, $f(X) \subset X$ だから, $\mathfrak{A} \neq \emptyset$.
ここで,

$$A_0 = \{x| \text{ 任意の } A \in \mathfrak{A} \text{ に対して } x \in A\}$$

とおく.
$A \in \mathfrak{A}$ とすると, $A_0 \subset A$.
f は順序を保つ写像だから,

$$\begin{aligned} f(A_0) &\subset f(A) \\ &\subset A. \end{aligned}$$

よって, $f(A_0) \subset A_0$.
更に, f は順序を保つ写像だから, $f(f(A_0)) \subset f(A_0)$. すなわち, $f(A_0) \in \mathfrak{A}$.
よって, $A_0 \subset f(A_0)$.
したがって, $f(A_0) = A_0$.