§4. ベクトル空間

ここでは, ベクトル空間に関する基本的事項について簡単に述べておこう.
実数を縦に n 個並べたもの全体を

$$\mathbf{R}^n = \left\{ \left. \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \right| x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R} \right\}$$

と表す. $\mathbf{R}^n$ に対しては線形空間またはベクトル空間という構造を考えることができる.

定義　V を集合とし, $u, v, w \in V$, $a, b \in \mathbf{R}$ とする. V に和という演算

$$u + v \in V$$

およびスカラー倍という演算

$$au \in V$$

が定められ, 次の (1)〜(8) がなりたつとき, V を線形空間またはベクトル空間という.

(1) $u + v = v + u$ (交換律).
(2) $(u + v) + w = u + (v + w)$ (結合律).
(3) ある $0 \in V$ が存在し, 任意の u に対して $u + 0 = 0 + u = u$.
(4) $a(bu) = (ab)u$ (結合律).
(5) $(a + b)u = au + bu$ (分配律).
(6) $a(u + v) = au + av$ (分配律).
(7) $1u = u$.
(8) $0u = 0$.

ベクトル空間としての V の元をベクトルということがある. また, (3) におけるベクトル 0 を零ベクトルという.

注意　上の定義では a, b を実数としているので, 厳密には V を実ベクトル空間という.
また, 零ベクトルも数の零も同じ記号 0 を用いるが, 文脈から判断して区別すること.
更に, (2) より, $(u + v) + w$ および $u + (v + w)$ はともに

$$u + v + w$$

と表しても構わない. 通常の数の足し算と同様である.

例 (数ベクトル空間)
$\mathbf{R}^n$ は行列としての和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. このとき, $\mathbf{R}^n$ を数ベクトル空間という.

ベクトル空間に関して次の 2 つの命題は基本的である.

命題　零ベクトルは一意的.

V をベクトル空間とする. $u \in V$ に対して $u + u' = 0$ をみたす $u' \in V$ を u の逆ベクトルという.

命題　逆ベクトルは一意的に存在する.

注意 通常の数の演算の場合と同様に, u の逆ベクトルを $-u$ と表す. 更に, $u+(-v)$ を $u-v$ と表す.
また, ベクトル空間の定義において, (8) は逆ベクトルが存在することに置き替えてもよいことが分かる.

1 つベクトル空間があると, その部分集合として部分空間というベクトル空間を考えることができる.

定義 W をベクトル空間 V の部分集合とする. W は V の和およびスカラー倍により, ベクトル空間となるとき, V の部分空間という.

定理 W がベクトル空間 V の部分空間となることと次の (1)〜(3) がなりたつこととは同値.

(1) $0 \in W$.
(2) $u, v \in W$ ならば, $u+v \in W$.
(3) $c \in \mathbf{R}$, $u \in W$ ならば, $cu \in W$.

例 (同次形の連立 1 次方程式の解空間)
A を $m \times n$ 行列とする. なお, 特に断らない限り, 行列の成分は実数であるとする. 数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ の部分集合 W を同次形の連立 1 次方程式 $Ax=0$ の解全体の集合として定める. すなわち,

$$W = \{x \in \mathbf{R}^n | Ax = 0\}$$

である. なお, $Ax=0$ の 0 は $\mathbf{R}^m$ の零ベクトルである.
このとき, W は $\mathbf{R}^n$ の部分空間となることが分かる. W を同次形の連立 1 次方程式 $Ax=0$ の解空間という.

次に, 1 次独立および 1 次従属という概念について述べよう. なお, 「1 次」という言葉は「線形」という言葉に置き替えられることもある. 例えば, 1 次独立を線形独立ということもある.

定義 V をベクトル空間とし, $u_1, u_2, \ldots, u_m \in V$, $c_1, c_2, \ldots, c_m \in \mathbf{R}$ とする.
式

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m$$

を $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の 1 次結合という.
等式

$$c_1u_1 + c_2u_2 + \cdots + c_mu_m = 0$$

がなりたつとき, これを $u_1, u_2, \ldots, u_m$ の 1 次関係という.
$u_1, u_2, \ldots, u_m$ は自明な 1 次関係しかもたないとき, すなわち上の 1 次関係がなりたつのは

$$c_1 = c_2 = \cdots = c_m = 0$$

の場合に限るとき, 1 次独立であるという.
$u_1, u_2, \ldots, u_m$ は 1 次独立でないとき, 1 次従属であるという.

例 (基本ベクトル)
数ベクトル空間 $\mathbf{R}^n$ のベクトル $e_1, e_2, \ldots, e_n$ を

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \ldots, \ e_n = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$$

により定める．すなわち，$i=1,2,\ldots,n$ に対して e_i は第 i 成分が 1 で，その他の成分が 0 のベクトルである．これらを基本ベクトルという．
このとき，$e_1,e_2,\ldots,e_n$ は 1 次独立であることが分かる．

V をベクトル空間とし，$u_1,u_2,\ldots,u_m\in V$ とする．このとき，$u_1,u_2,\ldots,u_m$ の 1 次結合を用いて，次のように V の部分集合を定めることができる．
W を $u_1,u_2,\ldots,u_m$ の 1 次結合全体の集合とする．すなわち，

$$W=\{c_1u_1+c_2u_2+\cdots+c_mu_m|c_1,c_2,\ldots,c_m\in\mathbf{R}\}$$

である．このとき，W は V の部分空間となることが分かる．W を $u_1,u_2,\ldots,u_m$ で生成される V の部分空間という．これを

$$W=\langle u_1,u_2,\ldots,u_m\rangle_{\mathbf{R}}$$

と表すことにする．

例　$e_1,e_2,\ldots,e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとすると，

$$\mathbf{R}^n=\langle e_1,e_2,\ldots,e_n\rangle_{\mathbf{R}}.$$

ベクトル空間があたえられると，それを生成するベクトル達の中で効率のよいものを考えることができるが，これが基底というものの大雑把な説明である．基底の概念を使って，ベクトル空間に対して次元という固有の量を定義することができる．これはベクトル空間のベクトルを指定するのに必要な座標の個数のようなものである．ベクトル空間には有限次元のものと無限次元のものがあるが，ここでは有限次元のベクトル空間を主に扱い，基底を次のように定義しよう．

定義　V をベクトル空間とし，$u_1,u_2,\ldots,u_n\in V$ とする．組 $\{u_1,u_2,\ldots,u_n\}$ は次の (1), (2) をみたすとき，V の基底という．

(1) $u_1,u_2,\ldots,u_n$ は 1 次独立．
(2) V は $u_1,u_2,\ldots,u_n$ で生成される．

例 (標準基底)
$e_1,e_2,\ldots,e_n$ を $\mathbf{R}^n$ の基本ベクトルとする．このとき，上の 2 つの例より，$\{e_1,e_2,\ldots,e_n\}$ は $\mathbf{R}^n$ の基底である．これを標準基底という．

1 つのベクトル空間に対する基底は 1 通りではなく，様々なものが考えられるが，次がなりたつ．

定理　ベクトル空間が基底をもつならば，基底に含まれるベクトルの個数は基底の選び方に依存しない．

V を基底をもつベクトル空間とする．基底に含まれるベクトルの個数を V の次元といい，$\dim V$ と表す．

例　$\mathbf{R}^n$ の次元については標準基底を考えるのが易しい．$\mathbf{R}^n$ の標準基底は n 個の基本ベクトルからなる．よって，

$$\dim\mathbf{R}^n=n.$$

零ベクトルのみからなる集合 $\{0\}$ もベクトル空間となる．これを零空間という．零空間の次元は 0 であるとする．
零空間および基底をもつベクトル空間は有限次元であるという．有限次元でないベクトル空間は無限次元であるという．

問題 4

1. 実数を成分とする $m \times n$ 行列全体を $M_{m,n}(\mathbf{R})$ と表すことにする. $M_{m,n}(\mathbf{R})$ は行列としての和およびスカラー倍により, ベクトル空間となる. 例えば, $M_{m,n}(\mathbf{R})$ の零ベクトルとは零行列 O のことである. $A \in M_{k,l}(\mathbf{R})$, $B \in M_{m,n}(\mathbf{R})$, $C \in M_{k,n}(\mathbf{R})$ を固定しておき, $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分集合 W を

$$W = \{X \in M_{l,m}(\mathbf{R}) | AXB = C\}$$

により定める. W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間となるのはどのようなときか調べよ.

2. A を n 次の正方行列とする. $A^m = O$ となる 2 以上の整数 m が存在し, 更にある $x \in \mathbf{R}^n$ に対して $A^{m-1}x \neq 0$ となるとする.
(1) $x, Ax, A^2x, \ldots, A^{m-1}x$ は 1 次独立であることを示せ.
(2) $m = n = 3$ のとき,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

となる 3 次の正則行列 P が存在することを示せ.

3. 連立 1 次方程式

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = 0$$

の解空間の次元とその基底を 1 組求めよ.

問題 4 の解答

1. まず, W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間であると仮定する.
このとき, W は零行列を含むから, C は零行列である.
逆に, C が零行列であると仮定する.
このとき,

$$W = \{X \in M_{l,m}(\mathbf{R}) | AXB = O\}$$

と表される.
まず, 明らかに W は零行列を含む.
次に, $X, Y \in W$ とすると,

$$\begin{aligned} A(X+Y)B &= AXB + AYB \\ &= O + O \\ &= O \end{aligned}$$

だから,

$$X + Y \in W.$$

更に, $c \in \mathbf{R}$, $X \in W$ とすると,

$$\begin{aligned} A(cX)B &= c(AXB) \\ &= cO \\ &= O \end{aligned}$$

だから,

$$cX \in W.$$

よって, W は $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間.
以上より, W が $M_{l,m}(\mathbf{R})$ の部分空間となるのは C が零行列のときに限る.

2. (1) $x, Ax, A^2x, \ldots, A^{m-1}x$ の 1 次関係

$$c_1x + c_2Ax + c_3A^2x + \cdots + c_mA^{m-1}x = 0 \quad (c_1, c_2, c_3, \ldots, c_m \in \mathbf{R}) \tag{$*$}$$

を考える.
まず, $(*)$ の両辺に左から A^{m-1} を掛けると, $A^m = O$ だから,

$$c_1A^{m-1}x = 0.$$

$A^{m-1}x \neq 0$ だから, $A^{m-1}x$ は 1 次独立.
よって,

$$c_1 = 0.$$

次に,

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_l = 0 \quad (l = 1, 2, 3, \ldots, m-1)$$

がなりたつと仮定する.
$(*)$ の両辺に左から A^{m-l-1} を掛けると, 上と同様に,

$$c_{l+1} = 0.$$

したがって,

$$c_1 = c_2 = c_3 = \cdots = c_m = 0.$$

すなわち, $x, Ax, A^2x, \ldots, A^{m-1}x$ は1次独立.

(2) 3次の正方行列 P を

$$P = (A^2x, Ax, x)$$

により定める.

(1) より, $|P| \neq 0$ だから, P は正則.

ここで,

$$\begin{aligned} AP &= (A^3x, A^2x, Ax) \\ &= (0, A^2x, Ax) \\ &= (A^2x, Ax, x)\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= P\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

3. 係数行列の行に関する基本変形を行うと,

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{第3行}-\text{第1行}\times 3]{\text{第2行}-\text{第1行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{第3行}-\text{第2行}\times 2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

だから,

$$x_1 + x_3 + x_4 = 0,\ x_2 + x_3 - x_4 = 0.$$

よって,

$$x_1 = -c_1 - c_2,\ x_2 = -c_1 + c_2,\ x_3 = c_1,\ x_4 = c_2 \quad (c_1, c_2 \in \mathbf{R})$$

だから, 解空間は

$$\left\{ c_1\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \middle|\, c_1, c_2 \in \mathbf{R} \right\}.$$

したがって, 解空間の次元は2で, $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ はその基底.