

## §5. 線形写像

ここでは、線形写像に関する基本的事項について簡単に述べておこう。

**定義**  $U, V$  をベクトル空間、 $f$  を  $U$  から  $V$  への写像とする。  $f$  は次の (1), (2) をみたすとき、線形写像という。

- (1) 任意の  $u, v \in U$  に対して  $f(u+v) = f(u) + f(v)$ .
- (2) 任意の  $c \in \mathbf{R}$  および任意の  $u \in U$  に対して  $f(cu) = cf(u)$ .

上の (2) より、線形写像は零ベクトルを零ベクトルへ写すことが分かる。

また、すべてのベクトルを零ベクトルへ写す写像は上の (1), (2) をみたすから、線形写像となる。これを零写像という。

**例**  $m \times n$  行列  $A$  を固定しておき、 $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への写像  $f_A$  を行列の積を用いて、

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める。

このとき、 $f_A$  は上の (1), (2) の性質をみたすことが分かるから、線形写像となる。

実は、 $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への線形写像はすべて上の例のようにして得られる。

**命題**  $f$  を  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への線形写像とする。このとき、ある  $m \times n$  行列  $A$  が存在し、

$$f(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

と表される。

**証明**  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  をそれぞれ  $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$  の標準基底とする。

このとき、各  $j = 1, 2, \dots, n$  に対して  $f(e_j)$  を  $e'_1, e'_2, \dots, e'_m$  の 1 次結合で

$$f(e_j) = a_{1j}e'_1 + a_{2j}e'_2 + \dots + a_{mj}e'_m \quad (a_{1j}, a_{2j}, \dots, a_{mj} \in \mathbf{R})$$

と表すことができる。

よって、 $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$  として、線形写像の性質を用いると、

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_n e_n) \\ &= x_1(a_{11}e'_1 + a_{21}e'_2 + \dots + a_{m1}e'_m) + x_2(a_{12}e'_1 + a_{22}e'_2 + \dots + a_{m2}e'_m) + \dots \\ &\quad + x_n(a_{1n}e'_1 + a_{2n}e'_2 + \dots + a_{mn}e'_m) \\ &= \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって、 $(i, j)$  成分が  $a_{ij}$  の  $m \times n$  行列を  $A$  とおけばよい。 □

ベクトル空間  $U$  からベクトル空間  $V$  への線形写像  $f$  に対して、 $f(U), f^{-1}(\{0\})$  をそれぞれ  $\text{Im } f, \text{Ker } f$  と表すことが多い。また、 $f^{-1}(\{0\})$  を  $f$  の核ともいう。

$f$  の像および核について次がなりたつ.

**定理**  $\text{Im}f$  は  $V$  の部分空間.

$\text{Ker}f$  は  $U$  の部分空間.

以下ではベクトル空間は有限次元であるとする.

$f$  をベクトル空間  $U$  からベクトル空間  $V$  への線形写像,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  をそれぞれ  $U, V$  の基底とする. このとき,  $m \times n$  行列  $A$  を用いて,

$$(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) = (v_1, v_2, \dots, v_m)A$$

と表すことができる.  $v_1, v_2, \dots, v_m$  は 1 次独立だから, このような  $A$  は一意的に定まる.  $A$  を基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  に関する  $f$  の表現行列という.

次の例から分かるように, 上の例において扱った行列  $A$  の定める自然な線形写像  $f_A$  の表現行列は標準基底に関しては  $A$  そのものとなる.

**例**  $A$  を  $(i, j)$  成分が  $a_{ij}$  の  $m \times n$  行列とし,  $\mathbf{R}^n$  から  $\mathbf{R}^m$  への線形写像  $f_A$  を

$$f_A(x) = Ax \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める.

$\{e_1, e_2, \dots, e_n\}, \{e'_1, e'_2, \dots, e'_m\}$  をそれぞれ  $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$  の標準基底とすると,

$$\begin{aligned} (f_A(e_1), f_A(e_2), \dots, f_A(e_n)) &= \left( \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix} \right) \\ &= (e'_1, e'_2, \dots, e'_m)A. \end{aligned}$$

よって,  $\mathbf{R}^n, \mathbf{R}^m$  の標準基底に関する  $f_A$  の表現行列は  $A$ .

表現行列は基底に依存するものである. まず, 基底の取り替えを行列を用いて表してみよう.

$V$  を  $n$  次元のベクトル空間とする.  $V$  の基底を 1 組選んでおき,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  とする.

基底の定義より,  $V$  の任意のベクトル  $x$  は

$$x = x_1u_1 + x_2u_2 + \dots + x_nu_n \quad (x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbf{R})$$

と一意的に表される.  $x_1, x_2, \dots, x_n$  を基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  に関する  $x$  の成分という.

**例**  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  を  $\mathbf{R}^n$  の標準基底とし,  $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n$  とする. このとき,

$$x = x_1e_1 + x_2e_2 + \dots + x_ne_n$$

だから, 標準基底  $\{e_1, e_2, \dots, e_n\}$  に関する  $x$  の成分は  $x_1, x_2, \dots, x_n$  である.

$n$  次元ベクトル空間  $V$  の基底を 2 組選んでおき,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  とする.

各  $i = 1, 2, \dots, n$  に対して, 基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  に関する  $v_i$  の成分を  $p_{1i}, p_{2i}, \dots, p_{ni}$  とし,  $p_{ij}$  を  $(i, j)$  成分とする  $n$  次の正方行列を  $P$  とおくと,

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)P$$

と表すことができる.  $P$  を基底変換  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  の基底変換行列という. 基底変換行列は正則行列で, 1つの基底変換に対して一意に定まることが分かる.

逆に,  $P$  を始めに選んでおき, 上の式で  $v_1, v_2, \dots, v_n$  を定めることができる.

では, 基底変換によって表現行列がどのように変わるのかを見てみよう.

**定理**  $f$  をベクトル空間  $U$  からベクトル空間  $V$  への線形写像,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$  を  $U$  の基底,  $P$  を基底変換  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$  の基底変換行列,  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$  を  $V$  の基底,  $Q$  を基底変換  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\} \rightarrow \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$  の基底変換行列,  $A$  を基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  に関する  $f$  の表現行列,  $B$  を基底  $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}, \{v'_1, v'_2, \dots, v'_m\}$  に関する  $f$  の表現行列とする. このとき,

$$B = Q^{-1}AP.$$

**証明**  $P$  の  $(i, j)$  成分を  $p_{ij}$  とおき, 定義に従って計算すると,

$$\begin{aligned} & (f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_n)) \\ &= (f(p_{11}u_1 + p_{21}u_2 + \dots + p_{n1}u_n), \dots, f(p_{1n}u_1 + p_{2n}u_2 + \dots + p_{nn}u_n)) \\ &= (p_{11}f(u_1) + p_{21}f(u_2) + \dots + p_{n1}f(u_n), \dots, p_{1n}f(u_1) + p_{2n}f(u_2) + \dots + p_{nn}f(u_n)) \\ &= (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n))P \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_m)AP. \end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned} (f(u'_1), f(u'_2), \dots, f(u'_n)) &= (v'_1, v'_2, \dots, v'_m)B \\ &= (v_1, v_2, \dots, v_m)QB. \end{aligned}$$

よって,

$$(v_1, v_2, \dots, v_m)AP = (v_1, v_2, \dots, v_m)QB.$$

$v_1, v_2, \dots, v_m$  は 1 次独立だから,

$$AP = QB.$$

基底変換行列は正則だから,

$$B = Q^{-1}AP.$$

□

ベクトル空間  $U$  の線形変換, すなわち  $U$  から  $U$  自身への線形写像に対して,  $U$  の基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  に関する表現行列を単に基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  に関する表現行列ということにする. 上の定理を線形変換の場合に適用すると, 次が得られる.

**定理**  $f$  をベクトル空間  $U$  の線形変換,  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$  を  $U$  の基底,  $P$  を基底変換  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$  の基底変換行列,  $A$  を基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  に関する  $f$  の表現行列,  $B$  を基底  $\{u'_1, u'_2, \dots, u'_n\}$  に関する  $f$  の表現行列とする. このとき,

$$B = P^{-1}AP.$$

## 問題 5

1.  $U, V, W$  をベクトル空間,  $f$  を  $U$  から  $V$  への線形写像,  $g$  を  $V$  から  $W$  への線形写像とする. このとき, 合成写像  $g \circ f$  は線形写像であることを示せ.
2.  $f$  をベクトル空間  $U$  からベクトル空間  $V$  への線形写像とする.  $\text{Ker } f = \{0\}$  であることと  $f$  が単射であることは同値であることを示せ.
3.  $f, g$  をベクトル空間  $U$  からベクトル空間  $V$  への線形写像とし,  $c \in \mathbf{R}$  とする. このとき,  $U$  から  $V$  への写像  $f + g, cf$  をそれぞれ

$$(f + g)(u) = f(u) + g(u), \quad (cf)(u) = cf(u) \quad (u \in U)$$

により定めると,  $f + g, cf$  は線形写像となり,  $U$  から  $V$  への線形写像全体はベクトル空間となることが分かる.

$\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  をそれぞれ  $U, V$  の基底,  $A, B$  をそれぞれ基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  に関する  $f, g$  の表現行列とする. 基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  に関する  $f + g, cf$  の表現行列を求めよ.

4.  $U, V, W$  をベクトル空間,  $f$  を  $U$  から  $V$  への線形写像,  $g$  を  $V$  から  $W$  への線形写像とする.  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$  をそれぞれ  $U, V, W$  の基底,  $A$  を基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  に関する  $f$  の表現行列,  $B$  を基底  $\{v_1, v_2, \dots, v_m\}, \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$  に関する  $g$  の表現行列とする.
  - (1) 基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{w_1, w_2, \dots, w_l\}$  に関する合成写像  $g \circ f$  の表現行列を求めよ.
  - (2)  $f$  が全単射であるとき,  $f$  の逆写像  $f^{-1}$  は  $V$  から  $U$  への線形写像で,  $m = n$  となることが分かる. このとき,  $f$  を同型写像といい,  $U$  と  $V$  は同型であるという.  
 $f$  が同型写像のとき, 基底  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$  に関する  $f^{-1}$  の表現行列を求めよ.
5.  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  を  $n$  次元ベクトル空間  $V$  の基底,  $P, Q$  をそれぞれ基底変換  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{v_1, v_2, \dots, v_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_n\} \rightarrow \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  の基底変換行列とする. 基底変換  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\} \rightarrow \{w_1, w_2, \dots, w_n\}$  の基底変換行列を求めよ.

## 問題 5 の解答

1. まず,  $u, v \in U$  とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u + v) &= g(f(u + v)) \\ &= g(f(u) + f(v)) \\ &= g(f(u)) + g(f(v)) \\ &= (g \circ f)(u) + (g \circ f)(v).\end{aligned}$$

次に,  $c \in \mathbf{R}$ ,  $u \in U$  とすると,

$$\begin{aligned}(g \circ f)(cu) &= g(f(cu)) \\ &= g(cf(u)) \\ &= cg(f(u)) \\ &= c(g \circ f)(u).\end{aligned}$$

よって,  $g \circ f$  は線形写像.

2. まず,  $\text{Ker } f = \{0\}$  であると仮定する.

$u, v \in V$  が

$$f(u) = f(v)$$

をみたすとする,  $f$  は線形写像だから,

$$f(u - v) = 0.$$

仮定より,

$$u - v = 0.$$

すなわち,

$$u = v.$$

よって,  $f$  は単射.

逆に,  $f$  が単射であると仮定する.

$u \in \text{Ker } f$  とすると,

$$\begin{aligned}f(u) &= 0 \\ &= f(0).\end{aligned}$$

仮定より,

$$u = 0.$$

よって,

$$\text{Ker } f = \{0\}.$$

3. まず,

$$\begin{aligned}(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) &= (v_1, v_2, \dots, v_m)A, \\ (g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_n)) &= (v_1, v_2, \dots, v_m)B\end{aligned}$$

だから,

$$\begin{aligned}
 & ((f+g)(u_1), (f+g)(u_2), \dots, (f+g)(u_n)) \\
 &= (f(u_1) + g(u_1), f(u_2) + g(u_2), \dots, f(u_n) + g(u_n)) \\
 &= (f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) + (g(u_1), g(u_2), \dots, g(u_n)) \\
 &= (v_1, v_2, \dots, v_m)A + (v_1, v_2, \dots, v_m)B \\
 &= (v_1, v_2, \dots, v_m)(A+B).
 \end{aligned}$$

よって, 基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  に関する  $f+g$  の表現行列は  $A+B$ .  
また,

$$\begin{aligned}
 ((cf)(u_1), (cf)(u_2), \dots, (cf)(u_n)) &= (cf(u_1), cf(u_2), \dots, cf(u_n)) \\
 &= c(f(u_1), f(u_2), \dots, f(u_n)) \\
 &= c(v_1, v_2, \dots, v_m)A \\
 &= (v_1, v_2, \dots, v_m)(cA).
 \end{aligned}$$

よって, 基底  $\{u_1, u_2, \dots, u_n\}, \{v_1, v_2, \dots, v_m\}$  に関する  $cf$  の表現行列は  $cA$ .

4. (1)  $A$  の  $(k, i)$  成分を  $a_{ki}$ ,  $B$  の  $(j, k)$  成分を  $b_{jk}$  とすると,  $i = 1, 2, \dots, n$  のとき,

$$\begin{aligned}
 (g \circ f)(u_i) &= g(f(u_i)) \\
 &= g(a_{1i}v_1 + a_{2i}v_2 + \dots + a_{mi}v_m) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_{ki}g(v_k) \\
 &= \sum_{k=1}^m a_{ki} \sum_{j=1}^l b_{jk}w_j \\
 &= \sum_{j=1}^l \sum_{k=1}^m b_{jk}a_{ki}w_j
 \end{aligned}$$

ここで,  $\sum_{k=1}^m b_{jk}a_{ki}$  は  $BA$  の  $(j, i)$  成分.

よって, 求める表現行列は  $BA$ .

(2) 求める表現行列を  $B$  とする.

恒等写像に対する表現行列は単位行列となるから, (1) と合わせると,  $BA, AB$  はともに  $n$  次単位行列.

よって,  $B = A^{-1}$ .

5.  $P, Q$  はそれぞれ

$$(v_1, v_2, \dots, v_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)P, \quad (w_1, w_2, \dots, w_n) = (v_1, v_2, \dots, v_n)Q$$

により定まるから,

$$(w_1, w_2, \dots, w_n) = (u_1, u_2, \dots, u_n)PQ.$$

よって, 求める基底変換行列は  $PQ$ .