§12. 2 次超曲面

実数を係数とする $x_1, x_2, \ldots, x_n$ の 2 次方程式は実対称行列 A と $b \in \mathbf{R}^n$ および $c \in \mathbf{R}$ を用いて,

$$
{}^t x A x + 2 {}^t b x + c = 0 \tag{$*$}
$$

と表すことができる. ただし,

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbf{R}^n
$$

である. $i, j = 1, 2, \ldots, n$ とすると, $x_i x_j$ と $x_j x_i$ は同類項であるから, A は実対称行列とすることができることに注意しよう.

定義　$(*)$ をみたす x 全体の集合または単に $(*)$ を 2 次超曲面という.
特に, $n = 2$, $n = 3$ のとき, それぞれ 2 次曲線, 2 次曲面という.

§10 においても扱ったように実対称行列は直交行列によって対角化されるから, $(*)$ によって表される 2 次超曲面は, 必要ならば座標変換を行うことにより, 簡単な形に表すことができそうである.
その前に, 直交行列の幾何学的な意味について, 2 次および 3 次の場合に考えてみよう.
まず, 2 次の直交行列について考える.
$A \in \mathrm{O}(2)$ を

$$
A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}
$$

と表しておくと, 直交行列の定義より,

$$
\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.
$$

よって,

$$
a^2 + c^2 = 1,\ ab + cd = 0,\ b^2 + d^2 = 1.
$$

これを解くと,

$$
A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \mp\sin\theta \\ \sin\theta & \pm\cos\theta \end{pmatrix} \quad (\text{複号同順}).
$$

$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$ のとき, $x \in \mathbf{R}^2$ に左から A を掛けることは x を原点を中心として各 θ 回転することを意味する.
$A = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta \end{pmatrix}$ のとき, $x \in \mathbf{R}^2$ に左から A を掛けることは x を直線 $x_2 \cos\dfrac{\theta}{2} = x_1 \sin\dfrac{\theta}{2}$ に関して対称移動することを意味する.
また,

$$
\mathrm{SO}(2) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \middle| \, 0 \le \theta < 2\pi \right\}
$$

である.

次に, 3 次の直交行列について考えるため, 数の範囲を複素数まで広げることにしよう.
$A \in \mathrm{O}(n)$ とすると, A は正規行列であるから, §11 において扱ったことより,

$$U^* A U = D$$

となる $U \in \mathrm{U}(n)$ および n 次対角行列 D が存在する.
$U \in \mathrm{U}(n)$, $A \in \mathrm{O}(n)$ だから,

$$\begin{aligned} D^* D &= (U^* A U)^* (U^* A U) \\ &= U^* {}^t A U U^* A U \\ &= E. \end{aligned}$$

ただし, E は n 次単位行列である.
よって, D の対角成分は絶対値 1 の複素数となり, それらは A の固有値でもある.
$n = 3$ とすると, A の固有方程式は実数係数の 3 次方程式だから, A の固有値の 1 つは 1 か -1 で, 残りの 2 つは $0 \leq \theta < 2\pi$ をみたす θ を用いて, $\cos\theta \mp i \sin\theta$ と表される. ただし, i は虚数単位である.
このとき, 次の (1), (2) をみたす $\mathbf{R}^3$ の正規直交基底 $\{u_1, u_2, u_3\}$ が存在することが分かる.

(1) u_1 は固有値 1 か -1 に対する A の固有ベクトル.
(2) $u_2 \pm i u_3$ は固有値 $\cos\theta \mp i \sin\theta$ に対する A の固有ベクトル. ただし, 複号同順である.

更に, $P = (u_1, u_2, u_3)$ とおくと, $P \in \mathrm{O}(3)$ で,

$${}^t P A P = \begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}$$

となることが分かる.
したがって, $A \in \mathrm{SO}(3)$ のときは, A は原点を通る u_1 方向の直線を回転軸とする角 θ の回転を意味する.
以上のことから, $\mathrm{SO}(n)$ を回転群ともいう.
では, 始めに戻り, $(*)$ によって表される 2 次超曲面を簡単に表すことを考えよう.
$P \in \mathrm{SO}(n)$, $q \in \mathbf{R}^n$ とし, $x \in \mathbf{R}^n$ から $y \in \mathbf{R}^n$ への変換を

$$x = Py + q \tag{$**$}$$

により定める. すなわち, x は y を P により回転させて, 更に q だけ平行移動させることによって得られる. 逆に,

$$y = {}^t P x - {}^t P q$$

だから, y は x を ${}^t P$ により回転させて, 更に $-{}^t P q$ だけ平行移動させることによって得られる.
$(**)$ を $(*)$ に代入すると,

$${}^t(Py + q) A (Py + q) + 2 {}^t b (Py + q) + c = 0.$$

A は実対称行列であることに注意すると,

$${}^t y ({}^t P A P) y + 2 {}^t (Aq + b) P y + {}^t q A q + 2 {}^t b q + c = 0.$$

ここで,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$$

とおく.
A が対角行列となるように P を選んでおき, 更に計算すると, 次が得られる.

定理 $(*)$ によって表される 2 次超曲面は, 必要ならば回転と平行移動を行うことにより, 次の (1)〜(3) の何れかのように表すことができる.

$$\begin{array}{ll} (1)\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + d = 0 & (\operatorname{rank} A = r,\ \operatorname{rank} \tilde{A} = r+1), \\ (2)\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 + 2p y_{r+1} = 0 & (\operatorname{rank} A = r,\ \operatorname{rank} \tilde{A} = r+2), \\ (3)\ \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_r y_r^2 = 0 & (\operatorname{rank} A = \operatorname{rank} \tilde{A} = r) \end{array}$$

ただし, $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r \neq 0$, $d \neq 0$, $p > 0$.

上の定理の (1)〜(3) のように表される 2 次超曲面を標準形という.
また, (1), (3) のように表される 2 次超曲面は原点に関して対称である. このことから, これらを有心 2 次超曲面という. 特に, A が正則なときは有心 2 次超曲面である.
これに対して, (2) のように表される 2 次超曲面は無心 2 次超曲面という.
更に, (1), (2) において, $\operatorname{rank} \tilde{A} = n+1$ のときは, 固有な 2 次超曲面という.

例 (2 次曲線)
固有な有心 2 次曲線は空集合でなければ, 楕円または双曲線である.
固有な無心 2 次曲線は放物線である.

例 (2 次曲面)
固有な有心 2 次曲面の標準形は空集合でなければ, 楕円面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

一葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

二葉双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

の何れかとなる. ただし, $a, b, c > 0$ である.
固有な無心 2 次曲面の標準形は楕円放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2},$$

または双曲放物面

$$z = \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2}$$

の何れかとなる. ただし, $a, b > 0$ である.

問題 12

1. $A \in \mathrm{SO}(n)$, $b \in \mathbf{R}^n$ に対して, $\mathbf{R}^n$ の変換 $T_{A,b}$ を

$$T_{A,b}(x) = Ax + b \quad (x \in \mathbf{R}^n)$$

により定める. なお, $T_{A,b}$ を $\mathbf{R}^n$ の合同変換という.

(1) $\mathbf{R}^n$ の合同変換全体の集合は写像の合成に関して群となることを示せ. すなわち, 回転と平行移動の合成によって得られる $\mathbf{R}^n$ の変換全体の集合は群となる. なお, この群を $\mathbf{R}^n$ の合同変換群という.

(2) $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R})$ の部分集合 H を

$$H = \left\{ \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \middle| A \in \mathrm{SO}(n),\ b \in \mathbf{R}^n \right\}$$

により定める. H は $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R})$ の部分群であることを示せ.

(3) $\mathbf{R}^n$ の合同変換群と H は同型であることを示せ.

2. 正則な n 次実対称行列 A と $b \in \mathbf{R}^n$ および $c \in \mathbf{R}$ に対して, 有心 2 次超曲面

$${}^t x A x + 2\,{}^t b x + c = 0$$

を考える. このとき, A の固有値を重解も込めて $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ とし,

$$\tilde{A} = \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix}$$

とおく. 上の有心 2 次超曲面の標準形は

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + \frac{\det \tilde{A}}{\det A} = 0$$

と表すことができることを示せ.

問題 12 の解答

1. (1) まず, $A, C \in \mathrm{SO}(n)$, $b, d \in \mathbf{R}^n$ とすると, 任意の $x \in \mathbf{R}^n$ に対して

$$\begin{aligned}(T_{C,d} \circ T_{A,b})(x) &= T_{C,d}(Ax+b) \\ &= C(Ax+b)+d \\ &= (CA)x + (Cb+d) \\ &= T_{CA,Cb+d}(x).\end{aligned}$$

ここで, E を n 次単位行列とすると, $T_{E,0}$ は $\mathbf{R}^n$ の上の恒等写像.
また,

$$CA = E,\ Cb + d = 0$$

とすると,

$$C = A^{-1},\ d = -A^{-1}b.$$

すなわち,

$$T_{A,b}^{-1} = T_{A^{-1},-A^{-1}b}.$$

更に, 積の定義より, 結合律がなりたつ.
よって, $\mathbf{R}^n$ の合同変換全体の集合は群となる.

(2) 任意の

$$\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} C & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H$$

に対して,

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1} &= \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C^{-1} & -C^{-1}d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} AC^{-1} & -AC^{-1}d+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in H.\end{aligned}$$

よって, H は $\mathrm{GL}(n+1, \mathbf{R})$ の部分群.

(3) $\mathbf{R}^n$ の合同変換 $T_{A,b}$ に対して, $f(T_{A,b}) \in H$ を

$$f(T_{A,b}) = \begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

により定める.
$T_{C,d}$ も $\mathbf{R}^n$ の合同変換とすると, (1) の計算より,

$$\begin{aligned}f(T_{C,d} \circ T_{A,b}) &= f(T_{CA,Cb+d}) \\ &= \begin{pmatrix} CA & Cb+d \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} C & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &= f(T_{C,d})f(T_{A,b}).\end{aligned}$$

よって, f は $\mathbf{R}^n$ の合同変換群から H への準同型写像.
更に, f は明らかに全単射だから, f は同型写像.
したがって, $\mathbf{R}^n$ の合同変換群と H は同型.

2. $P \in \mathrm{SO}(n)$, $q \in \mathbf{R}^n$ とし,

$$x = Py + q$$

とおく.
これを題意の 2 次超曲面の式に代入すると,

$$ {}^t y({}^t PAP)y + 2{}^t(Aq+b)Py + {}^t qAq + 2{}^t bq + c = 0.$$

A は正則な n 次実対称行列だから, P, q をそれぞれ

$$ {}^t PAP = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & \text{\huge 0} \\ & \lambda_2 & & \\ & & \ddots & \\ \text{\huge 0} & & & \lambda_n \end{pmatrix}, \; Aq + b = 0$$

となるように選んでおくことができる.
このとき,

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + \cdots + \lambda_n y_n^2 + {}^t qAq + 2{}^t bq + c = 0.$$

ただし,

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

ここで, E を n 次単位行列とすると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A & b \\ {}^t b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & q \\ 0 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} A & Aq+b \\ {}^t b & {}^t bq + c \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} A & 0 \\ {}^t b & {}^t bq + c \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

最初と最後の式の行列式を取ると,

$$\det \tilde{A} = (\det A)({}^t bq + c).$$

よって,

$$\begin{aligned} {}^t qAq + 2{}^t bq + c &= -{}^t bq + 2{}^t bq + c \\ &= {}^t bq + c \\ &= \frac{\det \tilde{A}}{\det A}. \end{aligned}$$