

## §7. アファイン接続

§6において扱った Levi-Civita 接続はアファイン接続というものへ一般化することができる.

**定義**  $M$  を  $C^\infty$  級多様体とする.  $\nabla$  を  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  に対して  $\nabla_Y X \in \mathfrak{X}(M)$  を対応させる写像

$$\nabla : \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \rightarrow \mathfrak{X}(M)$$

とする. 任意の  $X, Y, Z \in \mathfrak{X}(M)$  と任意の  $f \in C^\infty(M)$  に対して次の (1)~(4) がなりたつとき,  $\nabla$  を  $M$  のアファイン接続という. また,  $\nabla_Y X$  を  $X$  の  $Y$  に関する共変微分という.

$$(1) \nabla_{Y+Z} X = \nabla_Y X + \nabla_Z X.$$

$$(2) \nabla_{fY} X = f \nabla_Y X.$$

$$(3) \nabla_Z (X + Y) = \nabla_Z X + \nabla_Z Y.$$

$$(4) \nabla_Y (fX) = (Yf)X + f \nabla_Y X.$$

なお, (2) より, 各  $p \in M$  において  $\nabla X$  は  $T_p M$  の線形変換を定めることが分かる. よって,  $v \in T_p M$  に対して  $\nabla_v X \in T_p M$  を定めることができる.

$M$  を  $C^\infty$  級多様体,  $\nabla$  を  $M$  のアファイン接続とする.

$X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  に対して  $T(X, Y) \in \mathfrak{X}(M)$  を

$$T(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$$

により定める.

ここで,  $f, g \in C^\infty(M)$  とすると,

$$[fX, gY] = fg[X, Y] + f(Xg)Y - g(Yf)X$$

がなりたつ. 特に,  $g = 1$  とし, (2), (4) を用いると,

$$\begin{aligned} T(fX, Y) &= \nabla_{fX} Y - \nabla_Y (fX) - [fX, Y] \\ &= f \nabla_X Y - \{(Yf)X + f \nabla_Y X\} - \{f[X, Y] - (Yf)X\} \\ &= fT(X, Y). \end{aligned}$$

同様に,

$$T(X, fY) = fT(X, Y).$$

これらのことより,  $T$  は各  $p \in M$  において双線形写像

$$T_p : T_p M \times T_p M \rightarrow T_p M$$

を定めることが分かる. このことを  $T$  は (1, 2) 型のテンソル場であるという.

また,  $T$  は交代的, すなわち

$$T(X, Y) = -T(Y, X)$$

をみだす.  $T$  を捩率テンソル場または単に捩率という.  $T = 0$  となるとき,  $\nabla$  は捩れないなどという.

§6において扱った Levi-Civita 接続は次のように特徴付けることができる.

**定理**  $(M, g)$  を  $C^\infty$  級 Riemann 多様体とする. このとき,  $g$  に関して計量的で捩れない  $M$  のアファイン接続が一意的に存在する.

上の定理に現れたアファイン接続が Riemann 多様体の Levi-Civita 接続である。

次に、共変微分を座標近傍を用いて表してみよう。

$M$  を  $n$  次元  $C^\infty$  級多様体、 $\nabla$  を  $M$  のアファイン接続、 $(U, \varphi)$  を  $M$  の座標近傍とし、

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく。

このとき、 $\nabla$  は  $U$  上で

$$\nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} = \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^k \frac{\partial}{\partial x_k} \quad (*)$$

と表すことができる。ただし、 $\Gamma_{ij}^k$  ( $i, j, k = 1, 2, \dots, n$ ) は  $U$  上で定義された  $C^\infty$  級関数である。 $\Gamma_{ij}^k$  を Christoffel の記号という。

**定理**  $\nabla$  が捩れの無いアファイン接続ならば、任意の  $i, j, k = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\Gamma_{ij}^k = \Gamma_{ji}^k.$$

**証明**  $i, j = 1, 2, \dots, n$  とすると、仮定より、

$$\begin{aligned} 0 &= \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j} - \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_j}} \frac{\partial}{\partial x_i} - \left[ \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right] \\ &= \sum_{k=1}^n (\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k) \frac{\partial}{\partial x_k}. \end{aligned}$$

よって、任意の  $k = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k = 0.$$

□

§5 において現れた  $\Gamma_{ij}^k$  は Riemann 多様体の Levi-Civita 接続に対する Christoffel の記号である。

**例**  $(M, g)$  を  $n$  次元  $C^\infty$  級 Riemann 多様体、 $\nabla$  を  $M$  の Levi-Civita 接続とし、上のように座標近傍を選んでおく。

$\nabla$  は計量的だから、 $i, j, k = 1, 2, \dots, n$  とし、(\*) を用いると、

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x_i} g \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) &= g \left( \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_j}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \nabla_{\frac{\partial}{\partial x_i}} \frac{\partial}{\partial x_k} \right) \\ &= g \left( \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \frac{\partial}{\partial x_l}, \frac{\partial}{\partial x_k} \right) + g \left( \frac{\partial}{\partial x_j}, \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l \frac{\partial}{\partial x_l} \right). \end{aligned}$$

よって、 $g_{ij} = g \left( \frac{\partial}{\partial x_i}, \frac{\partial}{\partial x_j} \right)$  とおくと、

$$\frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} = \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l g_{jl}.$$

$(g_{ij})$  は正定値実対称行列に値をとり、 $\nabla$  は捩れをもたないから、上の定理より、

$$\begin{aligned} \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} &= \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ik}^l g_{jl} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{jk}^l g_{li} + \sum_{l=1}^n \Gamma_{ji}^l g_{kl} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{ki}^l g_{lj} - \sum_{l=1}^n \Gamma_{kj}^l g_{il} \\ &= 2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk}. \end{aligned}$$

$(g^{ij})$  を  $(g_{ij})$  の逆行列とし,  $m = 1, 2, \dots, n$  とすると,

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n g^{km} \left( \frac{\partial g_{jk}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{ki}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_k} \right) &= 2 \sum_{k=1}^n g^{km} \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} \\ &= 2 \sum_{l=1}^n \sum_{k=1}^n \Gamma_{ij}^l g_{lk} g^{km} \\ &= 2 \sum_{l=1}^n \Gamma_{ij}^l \delta_{lm} \\ &= 2\Gamma_{ij}^m. \end{aligned}$$

ただし,  $\delta_{lm}$  は Kronecker の  $\delta$  である.

したがって,  $m$  を  $k$ ,  $k$  を  $l$  と置き替えると,

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \sum_{l=1}^n g^{lk} \left( \frac{\partial g_{lj}}{\partial x_i} + \frac{\partial g_{il}}{\partial x_j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x_l} \right).$$

これは §5 において現れた式である.

§5 においては Christoffel の記号とともに  $\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma$  というものも現れた. これは曲線に沿う共変微分というものである.

$M$  を  $n$  次元  $C^\infty$  級多様体とし,

$$\gamma : I \rightarrow M$$

を  $M$  上の  $C^\infty$  級曲線とする.

ここで, 各  $t \in I$  に対して  $X(t) \in T_{\gamma(t)}M$  が定められているとする. この対応を  $\gamma$  に沿うベクトル場という.

$(U, \varphi)$  を  $\gamma(t) \in U$  となる  $M$  の座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \dots, x_n)$$

と表しておく,

$$X(t) = \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(t)}$$

と表すことができる. 各  $\xi_i(t)$  が  $C^\infty$  級関数のとき,  $X$  は  $C^\infty$  級であるという.

$\nabla$  を  $M$  のアファイン接続とする. このとき,  $X$  の  $\gamma$  に沿う共変微分  $\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma X(t)$  は

$$\begin{aligned} \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma X(t) &= \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(t)} \\ &= \sum_{i=1}^n \frac{d\xi_i(t)}{dt} \left( \frac{\partial}{\partial x_i} \right)_{\gamma(t)} + \sum_{i=1}^n \xi_i(t) \nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma \frac{\partial}{\partial x_i} \end{aligned}$$

と計算していく. 接続の定義に現れた (1)~(4) の性質と同様の規則に従って計算するとともに,  $X \in \mathfrak{X}(M)$  に対しては

$$\nabla_{\frac{d}{dt}}^\gamma X_{\gamma(t)} = \nabla_{\frac{d\gamma}{dt}} X$$

がなりたつものとして特徴付けられるのである.

### 関連事項 7. テンソル場

多様体上のベクトル場, 微分形式, Riemann 計量やアファイン接続の振率はテンソル場というものの例である.

まず, ベクトル空間上のテンソルについて述べよう.

$V$  を  $n$  次元実ベクトル空間,  $V^*$  を  $V$  の双対空間とする.  $V$  の  $s$  個の直積と  $V^*$  の  $r$  個の直積の上の多重線形写像

$$F : \underbrace{V \times V \times \cdots \times V}_s \times \underbrace{V^* \times V^* \times \cdots \times V^*}_r \rightarrow \mathbf{R}$$

を  $(r, s)$  型のテンソルという.

$V$  上の  $(r, s)$  型テンソル全体の空間を  $T_s^r(V)$  と表すことにすると,  $T_s^r(V)$  は自然に実ベクトル空間となる.  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  を  $V$  の基底,  $\{f_1, f_2, \dots, f_n\}$  を  $\{v_1, v_2, \dots, v_n\}$  の双対基底とし,  $i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n$  に対して

$$\begin{aligned} & (v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s})(v_{k_1}, v_{k_2}, \dots, v_{k_s}, f_{l_1}, f_{l_2}, \dots, f_{l_r}) \\ &= f_{j_1}(v_{k_1})f_{j_2}(v_{k_2}) \cdots f_{j_s}(v_{k_s})f_{l_1}(v_{i_1})f_{l_2}(v_{i_2}) \cdots f_{l_r}(v_{i_r}) \\ &= \begin{cases} 1 & (k_1 = j_1, k_2 = j_2, \dots, k_s = j_s, l_1 = i_1, l_2 = i_2, \dots, l_r = i_r), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

とおくと,  $\{v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}\}_{i_1, i_2, \dots, i_r, j_1, j_2, \dots, j_s = 1, 2, \dots, n}$  は  $T_s^r(V)$  の基底となる. 特に,  $T_s^r(V)$  の次元は  $n^{r+s}$  である. また,  $T_s^r(V)$  は

$$T_s^r(V) = \underbrace{V \otimes V \otimes \cdots \otimes V}_r \otimes \underbrace{V^* \otimes V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_s$$

とも表される. 更に,  $T_s^r(V)$  は  $T_0^s(V)$  から  $T_0^r(V)$  への線形写像全体の空間と同一視することができる. 実際,  $v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s}$  に対して

$$\begin{aligned} & (v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} \otimes f_{j_1} \otimes f_{j_2} \otimes \cdots \otimes f_{j_s})(v_{k_1} \otimes v_{k_2} \otimes \cdots \otimes v_{k_s}) \\ &= f_{j_1}(v_{k_1})f_{j_2}(v_{k_2}) \cdots f_{j_s}(v_{k_s})(v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r}) \\ &= \begin{cases} v_{i_1} \otimes v_{i_2} \otimes \cdots \otimes v_{i_r} & (k_1 = j_1, k_2 = j_2, \dots, k_s = j_s), \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \end{aligned}$$

を対応させることにより定まる線形写像を考えればよい.

さて,  $M$  を  $C^\infty$  級多様体とする. 各  $p \in M$  に対して  $K_p \in T_s^r(T_p M)$  があたえられているとき, この対応を  $K$  と表し,  $M$  上の  $(r, s)$  型のテンソル場という. 座標近傍を用いて表すことにより, 多様体上のテンソル場の微分可能性を定義することができる.

ベクトル場は  $(1, 0)$  型のテンソル場に他ならない.

$k$  次微分形式は  $(0, k)$  型のテンソル場に交代性の条件を付け加えたものである.

Riemann 計量は  $(0, 2)$  型のテンソル場に正定値対称性の条件を付け加えたものである.