

## §6. Gauss-Weingarten の公式

平面曲線または空間曲線を考える際には, Frenet の標構というものを微分したものを Frenet の標構自身の 1 次結合で表し, Frenet の公式または Frenet-Serret の公式という線形常微分方程式を導く. 曲面の場合にこれに対応するものが Gauss の公式と Weingarten の公式という線形偏微分方程式である.

曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

の単位法ベクトルを  $\nu$  とする.

このとき, 任意の  $(u, v) \in D$  に対して  $p_u(u, v), p_v(u, v), \nu(u, v)$  は  $\mathbf{R}^3$  の基底となるから,  $D$  で定義されたある関数  $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uu}^v, \dots, \Gamma_{vv}^v$  が存在し

$$\begin{cases} p_{uu} = \Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uu}^v p_v + L\nu, \\ p_{uv} = \Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{uv}^v p_v + M\nu, \\ p_{vu} = \Gamma_{vu}^u p_u + \Gamma_{vu}^v p_v + M\nu, \\ p_{vv} = \Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v + N\nu \end{cases} \quad (*)$$

と表される. ただし,  $p$  の第二基本形式を

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

とおいた. 上の式を Gauss の公式, 関数  $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uu}^v, \dots, \Gamma_{vv}^v$  を Christoffel の記号という. なお, 関数は必要に応じて微分可能であるとしているから,  $p_{uv} = p_{vu}$  で,  $(*)$  の第 2 式と第 3 式は本質的には同じものである. 特に,

$$\Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vu}^u, \quad \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vu}^v$$

である.

Christoffel の記号は第一基本形式を用いて表すことができる. 上で注意したことより, 以下では  $(*)$  の第 1 式, 第 2 式, 第 4 式に現れる Christoffel の記号を求めよう.

$p$  の第一基本形式を

$$Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

とする.

まず,

$$\begin{aligned} \langle p_{uu}, p_u \rangle &= \frac{1}{2} \langle p_u, p_u \rangle_u \\ &= \frac{1}{2} E_u \end{aligned}$$

だから,  $(*)$  の第 1 式と  $p_u$  の内積を取ると,

$$\frac{1}{2} E_u = \Gamma_{uu}^u E + \Gamma_{uu}^v F.$$

また,

$$\begin{aligned} \langle p_{uu}, p_v \rangle &= \langle p_u, p_v \rangle_u - \langle p_u, p_{vu} \rangle \\ &= F_u - \frac{1}{2} \langle p_u, p_u \rangle_v \\ &= F_u - \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

だから, (\*) の第 1 式と  $p_v$  の内積を取ると,

$$F_u - \frac{1}{2}E_v = \Gamma_{uu}^u F + \Gamma_{uu}^v G.$$

同様に, (\*) の第 4 式より,

$$\frac{1}{2}G_v = \Gamma_{vv}^v G + \Gamma_{vv}^u F, \quad F_v - \frac{1}{2}G_u = \Gamma_{vv}^v F + \Gamma_{vv}^u E.$$

次に,

$$\begin{aligned} \langle p_{uv}, p_u \rangle &= \frac{1}{2} \langle p_u, p_u \rangle_v \\ &= \frac{1}{2} E_v \end{aligned}$$

だから, (\*) の第 2 式と  $p_u$  の内積を取ると,

$$\frac{1}{2}E_v = \Gamma_{uv}^u E + \Gamma_{uv}^v F.$$

同様に,

$$\frac{1}{2}G_u = \Gamma_{uv}^v G + \Gamma_{uv}^u F.$$

これらを行列を用いてまとめると,

$$\begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}.$$

ここで,  $EG - F^2$  は常に正であることに注意すると,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Gamma_{uu}^u & \Gamma_{uv}^u & \Gamma_{vv}^u \\ \Gamma_{uu}^v & \Gamma_{uv}^v & \Gamma_{vv}^v \end{pmatrix} &= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2(EG - F^2)} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_u & E_v & 2F_v - G_u \\ 2F_u - E_v & G_u & G_v \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

よって,

$$\left\{ \begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{GE_u - 2FF_u + FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{uv}^u &= \frac{GE_v - FG_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{vv}^u &= \frac{2GF_v - GG_u - FG_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{uu}^v &= \frac{2EF_u - EE_v - FE_u}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{uv}^v &= \frac{EG_u - FE_v}{2(EG - F^2)}, \\ \Gamma_{vv}^v &= \frac{EG_v - 2FF_v + FG_u}{2(EG - F^2)}. \end{aligned} \right.$$

次に, Weingarten の公式について述べよう.

まず,

$$\langle \nu, \nu \rangle = 1$$

の両辺を  $u, v$  で微分すると,

$$\langle \nu_u, \nu \rangle = \langle \nu_v, \nu \rangle = 0$$

となる.

よって,  $D$  上のある関数  $P, Q, R, S$  が存在し

$$\begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix}$$

と表される.

ここで,

$$\begin{pmatrix} p_u \\ p_v \end{pmatrix} ({}^t p_u, {}^t p_v) = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

一方,

$$\begin{aligned} \langle \nu_u, p_u \rangle &= \langle \nu, p_u \rangle_u - \langle \nu, p_{uu} \rangle \\ &= -L. \end{aligned}$$

また,

$$\begin{aligned} \langle \nu_u, p_v \rangle &= \langle \nu, p_v \rangle_u - \langle \nu, p_{vu} \rangle \\ &= -M. \end{aligned}$$

同様に,

$$\langle \nu_v, p_u \rangle = -M, \quad \langle \nu_v, p_v \rangle = -N$$

だから,

$$\begin{pmatrix} \nu_u \\ \nu_v \end{pmatrix} ({}^t p_u, {}^t p_v) = - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix}.$$

よって,

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} P & Q \\ R & S \end{pmatrix} &= - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}^{-1} \\ &= - \begin{pmatrix} L & M \\ M & N \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} G & -F \\ -F & E \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{EG - F^2} \begin{pmatrix} FM - GL & FL - EM \\ FN - GM & FM - EN \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

したがって,

$$\begin{cases} \nu_u = \frac{FM - GL}{EG - F^2} p_u + \frac{FL - EM}{EG - F^2} p_v, \\ \nu_v = \frac{FN - GM}{EG - F^2} p_u + \frac{FM - EN}{EG - F^2} p_v. \end{cases}$$

この式が Weingarten の公式である.

## 問題 6

## 1. 曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

上の弧長により径数付けられた曲線

$$\gamma: I \rightarrow \mathbf{R}^3$$

を

$$\gamma(s) = p(u(s), v(s)) \quad (s \in I)$$

と表しておき,  $\Gamma_{uu}^u, \Gamma_{uv}^u, \Gamma_{vv}^u, \Gamma_{uu}^v, \Gamma_{uv}^v, \Gamma_{vv}^v$  を  $p$  に対する Christoffel の記号とする.

(1)  $\gamma$  の測地的曲率ベクトルを Christoffel の記号を用いて表せ.

(2)  $\gamma$  が測地線となるときの,  $\gamma$  がみたす微分方程式を求めよ. この微分方程式を測地線の方程式という.

(3)  $p$  が

$$p(u, v) = (u, v, 0) \quad ((u, v) \in \mathbf{R}^2)$$

により定められる平面のとき, 測地線の方程式は

$$u'' = v'' = 0$$

となることを示せ. 特に, 平面の測地線は直線の一部となることが分かる.

## 2. 曲面

$$p: D \rightarrow \mathbf{R}^3$$

の第一基本形式が

$$Edu^2 + Gdv^2$$

と表されるとき,  $p$  に対する Christoffel の記号は

$$\Gamma_{uu}^u = \frac{E_u}{2E}, \quad \Gamma_{uv}^u = \frac{E_v}{2E}, \quad \Gamma_{vv}^u = -\frac{G_u}{2E}, \quad \Gamma_{uu}^v = -\frac{E_v}{2G}, \quad \Gamma_{uv}^v = \frac{G_u}{2G}, \quad \Gamma_{vv}^v = \frac{G_v}{2G}$$

によりあたえられる.

(1) §4 において扱ったように, 柱面の第一基本形式は

$$(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)du^2 + dv^2$$

によりあたえられる. ただし,  $x, y$  は  $u$  のみの関数である. このとき, 上の Christoffel の記号を求めよ.

(2)  $a > 0$  とする. 問題 4 において扱ったように, 半径  $a$  の球面の一部の第一基本形式は

$$a^2 du^2 + a^2 \sin^2 u dv^2$$

によりあたえられる. このとき, 上の Christoffel の記号を求めよ.

(3) 問題 4 において扱ったように, 回転面の第一基本形式は

$$\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\} du^2 + (f(u))^2 dv^2$$

によりあたえられる. このとき, 上の Christoffel の記号を求めよ.

## 問題 6 の解答

1. (1) 合成関数の微分法より,

$$\gamma' = p_u u' + p_v v'.$$

$\nu$  を  $p$  の単位法ベクトル,

$$Ldu^2 + 2Mdudv + Ndv^2$$

を  $p$  の第二基本形式とすると,

$$\begin{aligned} \gamma'' &= p_{uu}(u')^2 + p_{uv}u'v' + p_u u'' + p_{vu}u'v' + p_{vv}(v')^2 + p_v v'' \\ &= p_u u'' + p_v v'' + p_{uu}(u')^2 + 2p_{uv}u'v' + p_{vv}(v')^2 \\ &= p_u u'' + p_v v'' + (\Gamma_{uu}^u p_u + \Gamma_{uv}^u p_v + L\nu)(u')^2 + 2(\Gamma_{uv}^u p_u + \Gamma_{vv}^u p_v + M\nu)u'v' \\ &\quad + (\Gamma_{vv}^u p_u + \Gamma_{vv}^v p_v + N\nu)(v')^2 \\ &= \{u'' + \Gamma_{uu}^u(u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u(v')^2\} p_u \\ &\quad + \{v'' + \Gamma_{uu}^v(u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v(v')^2\} p_v + \{L(u')^2 + 2Mu'v' + N(v')^2\} \nu. \end{aligned}$$

よって,  $\gamma$  の測地的曲率ベクトルは

$$\begin{aligned} &\{u'' + \Gamma_{uu}^u(u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u(v')^2\} p_u \\ &\quad + \{v'' + \Gamma_{uu}^v(u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v(v')^2\} p_v. \end{aligned}$$

(2) (1) より, 求める微分方程式は

$$\begin{cases} u'' + \Gamma_{uu}^u(u')^2 + 2\Gamma_{uv}^u u'v' + \Gamma_{vv}^u(v')^2 = 0, \\ v'' + \Gamma_{uu}^v(u')^2 + 2\Gamma_{uv}^v u'v' + \Gamma_{vv}^v(v')^2 = 0. \end{cases}$$

(3) まず,

$$p_u = (1, 0, 0), \quad p_v = (0, 1, 0)$$

だから,  $p$  の第一基本形式は

$$du^2 + dv^2.$$

よって,  $p$  に対する Christoffel の記号はすべて 0.

したがって, (2) より, 測地線の微分方程式は

$$u'' = v'' = 0.$$

2. (1) Christoffel の記号の式に

$$E = \dot{x}^2 + \dot{y}^2, \quad G = 1$$

を代入すると,

$$\Gamma_{uv}^u = \Gamma_{vv}^u = \Gamma_{uu}^v = \Gamma_{uv}^v = \Gamma_{vv}^v = 0.$$

また,

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)_u}{2(\dot{x}^2 + \dot{y}^2)} \\ &= \frac{\dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y}}{\dot{x}^2 + \dot{y}^2}. \end{aligned}$$

(2) Christoffel の記号の式に

$$E = a^2, \quad G = a^2 \sin^2 u$$

を代入すると,

$$\Gamma_{uu}^u = \Gamma_{uv}^u = \Gamma_{uu}^v = \Gamma_{vv}^v = 0.$$

また,

$$\begin{aligned} \Gamma_{vv}^u &= -\frac{(a^2 \sin^2 u)_u}{2a^2} \\ &= -\sin u \cos u. \end{aligned}$$

更に,

$$\begin{aligned} \Gamma_{uv}^v &= \frac{(a^2 \sin^2 u)_u}{2a^2 \sin^2 u} \\ &= \frac{\cos u}{\sin u} \\ &= \cot u. \end{aligned}$$

(3) Christoffel の記号の式に

$$E = (f'(u))^2 + (g'(u))^2, \quad G = (f(u))^2$$

を代入すると,

$$\Gamma_{uv}^u = \Gamma_{uu}^v = \Gamma_{vv}^v = 0.$$

また,

$$\begin{aligned} \Gamma_{uu}^u &= \frac{\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\}_u}{2\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\}} \\ &= \frac{f'(u)f''(u) + g'(u)g''(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}. \end{aligned}$$

更に,

$$\begin{aligned} \Gamma_{vv}^u &= -\frac{\{(f(u))^2\}_u}{2\{(f'(u))^2 + (g'(u))^2\}} \\ &= -\frac{f(u)f'(u)}{(f'(u))^2 + (g'(u))^2}. \end{aligned}$$

最後に,

$$\begin{aligned} \Gamma_{uv}^v &= \frac{\{(f(u))^2\}_u}{2(f(u))^2} \\ &= \frac{f'(u)}{f(u)}. \end{aligned}$$