§6. 多重線形形式

§5 において扱った双対空間は 1 次微分形式を定義するために必要な概念であるが, ここでは更に高次の微分形式を定義するための準備として, 多重線形形式について述べよう.

定義 V を実ベクトル空間, ω を V の k 個の直積から $\mathbf{R}$ への写像とする. $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ $(v_1, v_2, \ldots, v_k \in V)$ が各 v_i に関して線形であるとき, ω を V 上の k 次多重線形形式または k 次形式という.

上の定義において, 例えば $\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k)$ が v_1 に関して線形であるというのは, 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ と任意の $u, v \in V$ に対して

$$\omega(au + bv, v_2, \ldots, v_k) = a\omega(u, v_2, \ldots, v_k) + b\omega(v, v_2, \ldots, v_k)$$

がなりたつということである.

実ベクトル空間 V 上の k 次形式全体の集合を $\bigotimes^k V^*$ と表し, k 階の共変テンソル空間という. 特に, 1 階の共変テンソル空間は双対空間に他ならない. すなわち, $\bigotimes^1 V^* = V^*$ である.

また, 双対空間の場合と同様に, $\bigotimes^k V^*$ は自然に実ベクトル空間となる.

更に, 双対空間の元を用いると, 次のようにして多重線形形式を定めることができる.

$f_1, f_2, \ldots, f_k \in V^*$ に対して

$$(f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = f_1(v_1) f_2(v_2) \cdots f_k(v_k) \quad (v_1, v_2, \ldots, v_k \in V)$$

とおく. このとき, $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k$ は V 上の k 次形式を定める. $f_1 \otimes f_2 \otimes \cdots \otimes f_k$ を $f_1, f_2, \ldots, f_k$ のテンソル積という.

V が有限次元ならば, $\bigotimes^k V^*$ も有限次元である. 実際, 次がなりたつ.

定理 V を n 次元実ベクトル空間, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を V^* の基底とする. このとき,

$$\{f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}\}_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n}$$

は $\bigotimes^k V^*$ の基底. 特に, $\bigotimes^k V^*$ の次元は n^k.

証明 V の基底 $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ が $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の双対基底となるように選んでおく.

まず,

$$\begin{aligned}(f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k})(v_{j_1}, v_{j_2}, \ldots, v_{j_k}) &= f_{i_1}(v_{j_1}) f_{i_2}(v_{j_2}) \cdots f_{i_k}(v_{j_k}) \\ &= \begin{cases} 1 & ((i_1, i_2, \ldots, i_k) = (j_1, j_2, \ldots, j_k)), \\ 0 & ((i_1, i_2, \ldots, i_k) \neq (j_1, j_2, \ldots, j_k)). \end{cases}\end{aligned}$$

よって, $f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n)$ は 1 次独立となる.

更に, $\omega \in \bigotimes^k V^*$ とすると, 上の計算より,

$$\omega = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1}^{n} \omega(v_{i_1}, v_{i_2}, \ldots, v_{i_k}) f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}.$$

したがって, $\bigotimes^k V^*$ は $f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}$ $(i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n)$ で生成されるから, $\{f_{i_1} \otimes f_{i_2} \otimes \cdots \otimes f_{i_k}\}_{i_1, i_2, \ldots, i_k = 1, 2, \ldots, n}$ は $\bigotimes^k V^*$ の基底. □

V, W を実ベクトル空間, φ を V から W への線形写像とし, $\omega \in \bigotimes^k W^*$ に対して

$$(\varphi^*\omega)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \omega(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_k)) \quad (v_1, v_2, \ldots, v_k \in V)$$

とおく. このとき, $\varphi^*\omega$ は V 上の k 次形式を定める. $\varphi^*\omega$ を ω の φ による引き戻しという. 引き戻しは $\bigotimes^k W^*$ から $\bigotimes^k V^*$ への線形写像を定め, 特に, $k = 1$ のときは双対写像に他ならない.
微分形式を定義するためには, 多重線形形式に対して更に交代性という条件が必要である. ここでは, 交代性と対になる概念である対称性についても述べよう.
まず, 線形代数においても行列式を定義する際に現れる置換について簡単に述べておこう.
σ を k 文字の置換とする. すなわち, σ は集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ から同じ集合 $\{1, 2, \ldots, k\}$ への全単射である. k 文字の置換全体の集合を S_k と表すことにする.

定義　V を実ベクトル空間とし, $\omega \in \bigotimes^k V^*$ とする. 任意の $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ と任意の $\sigma \in S_k$ に対して

$$\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \omega(v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

がなりたつとき, ω を k 次対称形式という.

実ベクトル空間 V 上の k 次対称形式全体の集合を $\overset{k}{S} V^*$ と表す. V が n 次元ならば, $\overset{k}{S} V^*$ は $\bigotimes^k V^*$ の ${}_{n+k-1}C_k$ 次元部分空間であることが分かる.

例　V を実ベクトル空間, ω を V の内積とする. このとき, ω は V 上の 2 次対称形式とみなすことができる.
内積 ω は単なる 2 次対称形式ではなく, 0 と異なる任意の $v \in V$ に対して

$$\omega(v, v) > 0$$

をみたす. このようなとき, ω は正定値であるという.

k 次交代形式を定義するためには, 更に置換の符号を用いる必要がある.
まず, S_k は単なる写像の集まりではなく, 写像の合成によって閉じている集合である. すなわち, $\sigma, \tau \in S_k$ とすると, $\sigma \circ \tau \in S_k$ である. 置換は写像の合成によって群という構造をもつことから, $\sigma \circ \tau$ を σ と τ の積といい, $\sigma\tau$ と表す.
置換の中でも, 2 つの文字のみを入れ替える互換というものを考えることができる. このとき, 次がなりたつ.

定理　任意の置換は互換の積で表される.

置換 σ が m 個の互換の積で表されるとき,

$$\operatorname{sgn}\sigma = (-1)^m$$

と表し, これを σ の符号という. この定義は well-defined である. すなわち, 次がなりたつ.

定理　置換の符号は互換の積の表し方に依存しない.

定義　V を実ベクトル空間とし, $\omega \in \bigotimes^k V^*$ とする. 任意の $v_1, v_2, \ldots, v_k \in V$ と任意の $\sigma \in S_k$ に対して

$$\omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = (\operatorname{sgn}\sigma)\omega(v_1, v_2, \ldots, v_k)$$

がなりたつとき, ω を k 次交代形式という.

実ベクトル空間 V 上の k 次交代形式全体の集合を $\bigwedge^k V^*$ と表す. $\bigwedge^k V^*$ は $\bigotimes^k V^*$ の部分空間である. 特に,

$$\bigotimes^1 V^* = \bigwedge^1 V^* = V^*$$

である.
$\bigwedge^k V^*$ について更に詳しく見ていこう.
まず, $f_1, f_2, \ldots, f_k \in V^*$ に対して

$$(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k)(v_1, v_2, \ldots, v_k) = \begin{vmatrix} f_1(v_1) & f_1(v_2) & \cdots & f_1(v_k) \\ f_2(v_1) & f_2(v_2) & \cdots & f_2(v_k) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ f_k(v_1) & f_k(v_2) & \cdots & f_k(v_k) \end{vmatrix} \quad (v_1, v_2, \ldots, v_k \in V)$$

とおく. 右辺は k 次の正方行列の行列式である. このとき, 行列式の性質より, $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k \in \bigwedge^k V^*$ となる.
1 つめの定理の証明と同様に, 次を示すことができる.

定理 V を n 次元実ベクトル空間, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を V^* の基底とする. このとき,

$$\{f_{i_1} \wedge f_{i_2} \wedge \cdots \wedge f_{i_k}\}_{i_1 < i_2 < \cdots < i_k}$$

は $\bigwedge^k V^*$ の基底. 特に, $\bigwedge^k V^*$ の次元は ${}_nC_k$. ただし, $k > n$ のときは $\bigwedge^k V^*$ は零空間とみなす.

実は, 上に現れた $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$ の $\wedge$ は, 次に述べる外積という演算である.
$\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\theta \in \bigwedge^l V^*$ に対して

$$(\omega \wedge \theta)(v_1, v_2, \ldots, v_{k+l}) = \frac{1}{k!l!} \sum_{\sigma \in S_{k+l}} (\operatorname{sgn} \sigma) \omega(v_{\sigma(1)}, v_{\sigma(2)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) \theta(v_{\sigma(k+1)}, v_{\sigma(k+2)}, \ldots, v_{\sigma(k+l)})$$

$$(v_1, v_2, \ldots, v_{k+l} \in V)$$

とおく. このとき, $\omega \wedge \theta$ は $(k+l)$ 次交代形式を定めることが分かる. $\omega \wedge \theta$ を ω と θ の外積という. なお, 上の式の右辺における $k!l!$ は $(k+l)!$ とする場合もある.
外積に関して次の 2 つの定理は基本的である.

定理 V を実ベクトル空間とし, $\omega, \omega_1, \omega_2 \in \bigwedge^k V^*$, $\theta, \theta_1, \theta_2 \in \bigwedge^l V^*$, $a, b \in \mathbf{R}$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $(a\omega_1 + b\omega_2) \wedge \theta = a\omega_1 \wedge \theta + b\omega_2 \wedge \theta$.
(2) $\omega \wedge (a\theta_1 + b\theta_2) = a\omega \wedge \theta_1 + b\omega \wedge \theta_2$.

定理 V を実ベクトル空間とし, $\omega \in \bigwedge^k V^*$, $\theta \in \bigwedge^l V^*$, $\psi \in \bigwedge^r V^*$ とする. このとき, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $\omega \wedge \theta = (-1)^{kl} \theta \wedge \omega$.
(2) $(\omega \wedge \theta) \wedge \psi = \omega \wedge (\theta \wedge \psi)$ (結合律).

結合律より, $f_1, f_2, \ldots, f_k \in V^*$ に対して外積 $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$ を考えることができる. このとき, $f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_k$ は上のように行列式を用いて表されることが分かる.
なお, k 次形式に対して定義した引き戻しは, 対称形式や交代形式に対しても同様に定義することができる.

問題 6

1. V を実ベクトル空間とし, $f_1, f_2, f_3 \in V^*$ とする. 次の (1), (2) の等式がなりたつことを示せ.

(1) $f_1 \wedge f_2 = f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1$.

(2) $f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 = f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 - f_1 \otimes f_3 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1 \otimes f_3 + f_2 \otimes f_3 \otimes f_1 + f_3 \otimes f_1 \otimes f_2 - f_3 \otimes f_2 \otimes f_1$.

2. V を実ベクトル空間とし, $\omega \in \bigwedge^k V^*$ とする.

(1) k が奇数ならば, $\omega \wedge \omega = 0$ であることを示せ.

(2) $\dim V = 4$ とし, f_1, f_2, f_3, f_4 を V^* の基底とする. $\omega = f_1 \wedge f_2 + f_3 \wedge f_4$ のとき, $\omega \wedge \omega$ を求めよ.

3. V を n 次元実ベクトル空間, φ を V の線形変換とする. $\bigwedge^n V^*$ は 1 次元ベクトル空間であるから, φ による引き戻しの定める $\bigwedge^n V^*$ の線形変換 φ^* はスカラー倍で表される. φ^* は φ の行列式倍に一致することを示せ.

問題 6 の解答

1. (1) $v_1, v_2 \in V$ とすると,

$$\begin{aligned}(f_1 \wedge f_2)(v_1, v_2) &= \begin{vmatrix} f_1(v_1) & f_1(v_2) \\ f_2(v_1) & f_2(v_2) \end{vmatrix} \\ &= f_1(v_1)f_2(v_2) - f_1(v_2)f_2(v_1).\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}(f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1)(v_1, v_2) &= (f_1 \otimes f_2)(v_1, v_2) - (f_2 \otimes f_1)(v_1, v_2) \\ &= f_1(v_1)f_2(v_2) - f_2(v_1)f_1(v_2) \\ &= f_1(v_1)f_2(v_2) - f_1(v_2)f_2(v_1).\end{aligned}$$

よって,

$$f_1 \wedge f_2 = f_1 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1.$$

(2) $v_1, v_2, v_3 \in V$ とすると,

$$\begin{aligned}(f_1 \wedge f_2 \wedge f_3)(v_1, v_2, v_3) &= \begin{vmatrix} f_1(v_1) & f_1(v_2) & f_1(v_3) \\ f_2(v_1) & f_2(v_2) & f_2(v_3) \\ f_3(v_1) & f_3(v_2) & f_3(v_3) \end{vmatrix} \\ &= f_1(v_1)f_2(v_2)f_3(v_3) + f_1(v_2)f_2(v_3)f_3(v_1) \\ &\quad + f_1(v_3)f_2(v_1)f_3(v_2) - f_1(v_3)f_2(v_2)f_3(v_1) \\ &\quad - f_1(v_2)f_2(v_1)f_3(v_3) - f_1(v_1)f_2(v_3)f_3(v_2).\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}&(f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 - f_1 \otimes f_3 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1 \otimes f_3 + f_2 \otimes f_3 \otimes f_1 + f_3 \otimes f_1 \otimes f_2 \\ &\quad - f_3 \otimes f_2 \otimes f_1)(v_1, v_2, v_3) \\ &\quad = (f_1 \otimes f_2 \otimes f_3)(v_1, v_2, v_3) - (f_1 \otimes f_3 \otimes f_2)(v_1, v_2, v_3) \\ &\qquad - (f_2 \otimes f_1 \otimes f_3)(v_1, v_2, v_3) + (f_2 \otimes f_3 \otimes f_1)(v_1, v_2, v_3) \\ &\qquad + (f_3 \otimes f_1 \otimes f_2)(v_1, v_2, v_3) - (f_3 \otimes f_2 \otimes f_1)(v_1, v_2, v_3) \\ &\quad = f_1(v_1)f_2(v_2)f_3(v_3) - f_1(v_1)f_3(v_2)f_2(v_3) - f_2(v_1)f_1(v_2)f_3(v_3) \\ &\qquad + f_2(v_1)f_3(v_2)f_1(v_3) + f_3(v_1)f_1(v_2)f_2(v_3) - f_3(v_1)f_2(v_2)f_1(v_3) \\ &\quad = f_1(v_1)f_2(v_2)f_3(v_3) + f_1(v_2)f_2(v_3)f_3(v_1) + f_1(v_3)f_2(v_1)f_3(v_2) \\ &\qquad - f_1(v_3)f_2(v_2)f_3(v_1) - f_1(v_2)f_2(v_1)f_3(v_3) - f_1(v_1)f_2(v_3)f_3(v_2).\end{aligned}$$

よって,

$$\begin{aligned}f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 = f_1 \otimes f_2 \otimes f_3 &- f_1 \otimes f_3 \otimes f_2 - f_2 \otimes f_1 \otimes f_3 + f_2 \otimes f_3 \otimes f_1 \\ &+ f_3 \otimes f_1 \otimes f_2 - f_3 \otimes f_2 \otimes f_1.\end{aligned}$$

2. (1) k は奇数だから,

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega &= (-1)^{k \cdot k} \omega \wedge \omega \\ &= -\omega \wedge \omega.\end{aligned}$$

よって,

$$\omega \wedge \omega = 0.$$

(2) まず,

$$\begin{aligned}\omega \wedge \omega &= (f_1 \wedge f_2 + f_3 \wedge f_4) \wedge (f_1 \wedge f_2 + f_3 \wedge f_4) \\ &= (f_1 \wedge f_2) \wedge (f_1 \wedge f_2) + (f_1 \wedge f_2) \wedge (f_3 \wedge f_4) + (f_3 \wedge f_4) \wedge (f_1 \wedge f_2) \\ &\quad + (f_3 \wedge f_4) \wedge (f_3 \wedge f_4).\end{aligned}$$

ここで, $f_1, f_2 \in \bigwedge^1 V^*$ だから, (1) より,

$$\begin{aligned}(f_1 \wedge f_2) \wedge (f_1 \wedge f_2) &= f_1 \wedge (f_2 \wedge f_1) \wedge f_2 \\ &= -f_1 \wedge (f_1 \wedge f_2) \wedge f_2 \\ &= -(f_1 \wedge f_1) \wedge (f_2 \wedge f_2) \\ &= 0.\end{aligned}$$

同様に,

$$(f_3 \wedge f_4) \wedge (f_3 \wedge f_4) = 0.$$

また,

$$\begin{aligned}(f_3 \wedge f_4) \wedge (f_1 \wedge f_2) &= (-1)^{2\cdot 2}(f_1 \wedge f_2) \wedge (f_3 \wedge f_4) \\ &= f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \wedge f_4.\end{aligned}$$

よって,

$$\omega \wedge \omega = 2 f_1 \wedge f_2 \wedge f_3 \wedge f_4.$$

3. $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ を V の基底, $\{f_1, f_2, \ldots, f_n\}$ を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ の双対基底とすると,

$$\begin{aligned}(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)(v_1, v_2, \ldots, v_n) &= \det(f_i(v_j)) \\ &= \det(\delta_{ij}) \\ &= 1.\end{aligned}$$

一方, (a_{ij}) を $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ に関する φ の表現行列とすると,

$$\begin{aligned}(\varphi^*(f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n))(v_1, v_2, \ldots, v_n) &= (f_1 \wedge f_2 \wedge \cdots \wedge f_n)(\varphi(v_1), \varphi(v_2), \ldots, \varphi(v_n)) \\ &= \det\left(f_i(\varphi(v_j))\right) \\ &= \det\left(f_i\left(\sum_{k=1}^n a_{kj} v_k\right)\right) \\ &= \det\left(\sum_{k=1}^n a_{kj} f_i(v_k)\right) \\ &= \det\left(\sum_{k=1}^n a_{kj} \delta_{ik}\right) \\ &= \det(a_{ij}).\end{aligned}$$

よって, φ^* は φ の行列式倍.