§8. 微分形式の積分

微分積分において現れる定積分や重積分および線積分は, 幾何学の立場からは微分形式の積分とみなすことができる. なお, 以下の例からも分かるように, ここでは微分形式は必ずしも $\mathbf{R}^n$ 全体の上で定義されている必要はない.

例 (定積分)
f を区間 $[a,b]$ で定義された関数とする. このとき, 定積分

$$\int_a^b f(x)dx$$

は 1 次微分形式 fdx を $[a,b]$ 上で積分したものとみなすことができる.

例 (重積分)
D を $\mathbf{R}^2$ の領域, f を D で定義された関数とする. このとき, 重積分

$$\iint_D f(x,y)dxdy$$

は 2 次微分形式 $fdx \wedge dy$ を D 上で積分したものとみなすことができる.

例 (線積分)
平面曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^2$$

に対して, f, g を γ の像の近くで定義された関数とする. このとき, f の γ に沿った線積分

$$\int_\gamma fdx + gdy$$

は 1 次微分形式 $fdx + gdy$ を γ に沿って積分したものとみなすことができる.

まず, 3 つめの例を一般化し, 1 次微分形式を $\mathbf{R}^n$ 内の曲線に沿って積分することを考えてみよう.
$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a,b] \to \mathbf{R}^n$$

に対して, $f_1, f_2, \ldots, f_n$ を γ の像の近くで定義された関数とする. また, $\mathbf{R}^n$ および γ を

$$\mathbf{R}^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) | x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbf{R}\},\ \gamma = (\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$$

と表しておく. このとき,

$$\int_\gamma (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n) = \int_a^b (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \cdots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\, dt$$

とおき, これを 1 次微分形式 $f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n$ の曲線 γ に沿った積分という.
特に, $n = 1$ とし, γ を包含写像, すなわち

$$\gamma(t) = t \quad (t \in [a,b])$$

とすれば, これは 1 変数関数の定積分に一致する.
なお, ここでは詳しく述べないが, 上の定義において $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ の微分があるおかげで, 向きを変えない変数変換に対しては積分の値は変わらないことが分かる.

1 変数の微分積分において馴染み深い等式

$$\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a)$$

は §7 において扱った外微分を用いて, 次のように一般化することができる.

定理　$\mathbf{R}^n$ 内の曲線

$$\gamma : [a, b] \to \mathbf{R}^n$$

に対して, f を γ の像の近くで定義された関数とする. このとき,

$$\int_\gamma df = f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).$$

証明　合成関数の微分法より,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma df &= \int_\gamma \left(\frac{\partial f}{\partial x_1} dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2} dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n} dx_n \right) \\
&= \int_a^b \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\gamma(t))\gamma_1'(t) + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\gamma(t))\gamma_n'(t) \right) dt \\
&= \int_a^b \frac{d(f \circ \gamma)}{dt} dt \\
&= [(f \circ \gamma)(t)]_a^b \\
&= f(\gamma(b)) - f(\gamma(a)).
\end{aligned}$$

□

更に, k 次微分形式の積分を考えてみよう. 1 次微分形式の積分では曲線に沿った積分であったが, 今度は有界閉区間の k 個の直積, すなわち k 次元直方体からの写像に沿った積分となる. また, $\mathbf{R}^n$ 上の k 次微分形式は

$$\sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$$

と表されることも思い出そう.
k 次元直方体から $\mathbf{R}^n$ への写像

$$\varphi : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k] \to \mathbf{R}^n$$

に対して, $f_{i_1 \ldots i_k}$ $(i_1 < \cdots < i_k)$ を φ の像の近くで定義された関数とする. このとき,

$$\begin{aligned}
&\int_\varphi \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k} \\
&= \int_{[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_k, b_k]} \sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k}(\varphi(t_1, \ldots, t_k)) \begin{vmatrix} \dfrac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_1} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_1} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{\partial \varphi_{i_1}}{\partial t_k} & \cdots & \dfrac{\partial \varphi_{i_k}}{\partial t_k} \end{vmatrix} dt_1 \cdots dt_k
\end{aligned}$$

とおき, これを k 次微分形式 $\sum_{i_1 < \cdots < i_k} f_{i_1 \ldots i_k} dx_{i_1} \wedge \cdots \wedge dx_{i_k}$ の写像 φ に沿った積分という.
このとき, 上の定理は次のように一般化することができる.

定理　$(k+1)$ 次元直方体から $\mathbf{R}^n$ への写像

$$\varphi : [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{k+1}, b_{k+1}] \to \mathbf{R}^n$$

に対して, ω を φ の像の近くで定義された k 次微分形式とする. このとき,

$$\int_\varphi d\omega = \sum_{i=1}^{k+1} (-1)^{i-1} \left(\int_{\varphi(\dots, b_i, \dots)} \omega - \int_{\varphi(\dots, a_i, \dots)} \omega \right).$$

ただし, 例えば $\varphi(\dots, b_i, \dots)$ は

$$(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_{k+1}) \in [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_{i-1}, b_{i-1}] \times [a_{i+1}, b_{i+1}] \times \cdots \times [a_{k+1}, b_{k+1}]$$

に対して $\varphi(x_1, \dots, x_{i-1}, b_i, x_{i+1}, \dots, x_{k+1})$ を対応させる k 次元直方体からの写像である.

注意　上の 2 つの定理は更に多様体上の積分において, Stokes の定理へと一般化することができる. すなわち, これらはいわば, 曲線あるいは直方体からの写像に対する Stokes の定理である.

微分形式の積分を引き戻しを用いて見直してみよう.
まず, 1 次微分形式の積分の定義に現れた式の右辺は曲線 γ による引き戻しを用いて表されることに注意しよう. 実際,

$$\begin{aligned}
&\gamma^*(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n) \\
&\quad = f_1(\gamma(t)) d(x_1 \circ \gamma) + f_2(\gamma(t)) d(x_2 \circ \gamma) + \cdots + f_n(\gamma(t)) d(x_n \circ \gamma) \\
&\quad = f_1(\gamma(t)) d\gamma_1 + f_2(\gamma(t)) d\gamma_2 + \cdots + f_n(\gamma(t)) d\gamma_n \\
&\quad = (f_1(\gamma(t))\gamma_1'(t) + f_2(\gamma(t))\gamma_2'(t) + \cdots + f_n(\gamma(t))\gamma_n'(t))\, dt
\end{aligned}$$

である.
よって, ι を $[a, b]$ から $\mathbf{R}$ への包含写像とすると,

$$\int_\gamma (f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n) = \int_\iota \gamma^*(f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \cdots + f_n dx_n).$$

更に, φ を k 次元直方体から $\mathbf{R}^n$ への写像, ι をこの直方体から $\mathbf{R}^k$ への包含写像, ω を φ の像の近くで定義された k 次微分形式とする. このとき, 上と同様に,

$$\int_\varphi \omega = \int_\iota \varphi^* \omega.$$

これらの事実は次のように一般化することができる.

定理　φ を k 次元直方体から $\mathbf{R}^n$ への写像, ψ を φ の像の近くから $\mathbf{R}^m$ への写像, ω を $\psi \circ \varphi$ の像の近くで定義された k 次微分形式とする. このとき,

$$\int_\varphi \psi^* \omega = \int_{\psi \circ \varphi} \omega.$$

証明　問題 7 で扱った引き戻しに関する性質

$$(\psi \circ \varphi)^* \omega = \varphi^* \psi^* \omega$$

を用いればよい. □

問題 8

1. $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義された 1 次微分形式 ω を

$$\omega = -\frac{x_2}{x_1^2 + x_2^2} dx_1 + \frac{x_1}{x_1^2 + x_2^2} dx_2$$

により定める.

(1) $d\omega = 0$ を示せ.

(2) $\mathbf{R}^2 \setminus \{0\}$ で定義された関数 f で, $\omega = df$ をみたすものは存在しないことを示せ.
なお, ω が単連結領域という領域で定義された k 次微分形式で, $d\omega = 0$ をみたすならば, $\omega = d\theta$ をみたす $(k-1)$ 次微分形式 θ が存在することが分かる. これを Poincaré の補題という. 例えば, $\mathbf{R}^n$ や球体は単連結領域である.

2. $a, b > 0$ とし, 長方形領域 $[0, a] \times [0, b]$ から $\mathbf{R}^3$ への写像 φ を

$$\varphi(t_1, t_2) = (t_1, 2t_2, t_1 t_2^2) \quad ((t_1, t_2) \in [0, a] \times [0, b])$$

により定める. 次の (1)〜(3) の積分の値を求めよ.

(1) $\displaystyle\int_\varphi x_3 dx_1 \wedge dx_2.$

(2) $\displaystyle\int_\varphi x_1 dx_2 \wedge dx_3.$

(3) $\displaystyle\int_\varphi x_2 dx_3 \wedge dx_1.$

3. A を n 次の正方行列とし, n 次元直方体

$$[a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$$

から $\mathbf{R}^n$ への写像 φ を

$$\varphi(t_1, \ldots, t_n) = (t_1, \ldots, t_n)A \quad ((t_1, \ldots, t_n) \in [a_1, b_1] \times \cdots [a_n, b_n])$$

により定める. このとき, 積分

$$\int_\varphi dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$$

の値を求めよ.

問題 8 の解答

1. (1) 直接計算すると,

$$\begin{aligned}
d\omega &= -\frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{x_2}{x_1^2+x_2^2}\right)dx_2\wedge dx_1 + \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{x_1}{x_1^2+x_2^2}\right)dx_1\wedge dx_2 \\
&= \frac{1\cdot(x_1^2+x_2^2)-x_2\cdot 2x_2}{(x_1^2+x_2^2)^2}dx_1\wedge dx_2 + \frac{1\cdot(x_1^2+x_2^2)-x_1\cdot 2x_1}{(x_1^2+x_2^2)^2}dx_1\wedge dx_2 \\
&= \frac{x_1^2+x_2^2-2x_2^2+x_1^2+x_2^2-2x_1^2}{(x_1^2+x_2^2)^2}dx_1\wedge dx_2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

(2) 題意のような f が存在すると仮定する.
また, 像が $\mathbf{R}^2\setminus\{0\}$ に含まれる曲線 γ を

$$\gamma(t) = (\cos t, \sin t) \quad (t\in[0,2\pi])$$

により定める.
このとき,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_\gamma df \\
&= f(\gamma(2\pi)) - f(\gamma(0)) \\
&= f(1,0) - f(1,0) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

一方,

$$\begin{aligned}
\int_\gamma \omega &= \int_0^{2\pi}\left\{-\frac{\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(\cos t)' + \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(\sin t)'\right\}dt \\
&= \int_0^{2\pi}\left\{-\frac{\sin t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(-\sin t) + \frac{\cos t}{\cos^2 t+\sin^2 t}(\cos t)\right\}dt \\
&= \int_0^{2\pi} dt \\
&= 2\pi.
\end{aligned}$$

これは矛盾.
よって, f は存在しない.

2. まず,

$$\varphi_1(t_1,t_2,t_3) = t_1,\ \varphi_2(t_1,t_2,t_3) = 2t_2,\ \varphi_3(t_1,t_2,t_3) = t_1t_2^2$$

とおく.
(1) 定義にしたがって計算すると,

$$\begin{aligned}
\int_\varphi x_3 dx_1\wedge dx_2 &= \int_{[0,a]\times[0,b]} t_1t_2^2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} & \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} \end{vmatrix} dt_1dt_2 \\
&= \int_{[0,a]\times[0,b]} t_1t_2^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} dt_1dt_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= 2\int_{[0,a]\times[0,b]} t_1 t_2^2 dt_1 dt_2 \\
&= 2\int_0^a t_1 dt_1 \int_0^b t_2^2 dt_2 \\
&= 2\left[\frac{1}{2}t_1^2\right]_0^a \left[\frac{1}{3}t_2^3\right]_0^b \\
&= \frac{1}{3}a^2b^3.
\end{aligned}
$$

(2) 定義にしたがって計算すると,

$$
\begin{aligned}
\int_\varphi x_1 dx_2 \wedge dx_3 &= \int_{[0,a]\times[0,b]} t_1 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_2}{\partial t_2} & \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \\
&= \int_{[0,a]\times[0,b]} t_1 \begin{vmatrix} 0 & t_2^2 \\ 2 & 2t_1t_2 \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \\
&= -2\int_{[0,a]\times[0,b]} t_1 t_2^2 dt_1 dt_2 \\
&= -\frac{1}{3}a^2b^3.
\end{aligned}
$$

(3) 定義にしたがって計算すると,

$$
\begin{aligned}
\int_\varphi x_2 dx_3 \wedge dx_1 &= \int_{[0,a]\times[0,b]} 2t_2 \begin{vmatrix} \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t_1} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_1} \\ \dfrac{\partial\varphi_3}{\partial t_2} & \dfrac{\partial\varphi_1}{\partial t_2} \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \\
&= \int_{[0,a]\times[0,b]} 2t_2 \begin{vmatrix} t_2^2 & 1 \\ 2t_1t_2 & 0 \end{vmatrix} dt_1 dt_2 \\
&= -4\int_{[0,a]\times[0,b]} t_1 t_2^2 dt_1 dt_2 \\
&= -\frac{2}{3}a^2b^3.
\end{aligned}
$$

3. 求める値は

$$
\begin{aligned}
\int_\varphi dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n &= \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} |J\varphi| dt_1 \cdots dt_n \\
&= \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} |A| dt_1 \cdots dt_n \\
&= |A| \int_{[a_1,b_1]\times\cdots\times[a_n,b_n]} dt_1 \cdots dt_n \\
&= |A|(b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n).
\end{aligned}
$$