§2. 多様体の定義

多様体を定義しよう．なお, 以下に現れる n 次元 Euclid 空間 $\mathbf{R}^n$ に対しては Euclid 距離から定まる通常の位相を考えることとする．また, 部分集合の位相については相対位相を考えることとする．
まずは位相多様体の定義から始めよう．

定義　M を Hausdorff 空間とする．M の任意の点が $\mathbf{R}^n$ の開集合と同相な近傍をもつとき, すなわち任意の $p \in M$ に対して, p の近傍 U, $\mathbf{R}^n$ の開集合 U', U から U' への全単射な連続写像 φ が存在し φ^{-1} も連続なとき, M を n 次元位相多様体という．
このとき, 組 (U, φ) を M の座標近傍, φ を U 上の局所座標系という．
また,

$$\varphi(p) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておくとき, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を p の局所座標という．

注意　Hausdorff 性を仮定しなくとも, 上と同様の概念を定義することはできる．
例えば, p_0 を実数とは異なる 1 点とし,

$$M = \mathbf{R} \cup \{p_0\}$$

とおく．
ここで, M の部分集合系 $\mathfrak{B}$ を

$$\mathfrak{B} = \{O \subset \mathbf{R} | O \text{ は開集合 }\} \cup \{(-\varepsilon, 0) \cup \{p_0\} \cup (0, \varepsilon) | \varepsilon > 0\}$$

により定める．このとき, $\mathfrak{B}$ を基底とする M の位相 $\mathfrak{O}$ が存在することが分かる．すなわち, $\mathfrak{O}$ は $\mathfrak{B}$ の元の和集合として表される M の部分集合全体である．
このとき, $(M, \mathfrak{O})$ は Hausdorff ではない．
実際, 0 と p_0 を互いに交わらない開集合で分離することはできないからである．
特に, M の点列 $\left\{\dfrac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ は 0 にも p_0 にも収束してしまう．
しかし, 任意の $p \in M$ に対して p は $\mathbf{R}$ の開集合と同相な近傍をもつ．
まず, $p \neq p_0$ のときは明らかである．
また, $p = p_0$ のときは $\varepsilon > 0$ に対して p_0 の近傍

$$(-\varepsilon, 0) \cup \{p_0\} \cup (0, \varepsilon)$$

から $\mathbf{R}$ の開集合 $(-\varepsilon, \varepsilon)$ への同相写像 φ を

$$\varphi(q) = \begin{cases} q & (q \in (-\varepsilon, 0) \cup (0, \varepsilon)), \\ 0 & (q = p_0) \end{cases}$$

により定めればよい．

M を n 次元位相多様体とする．
位相多様体の定義より, M の座標近傍からなる集合族 $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ が存在し,

$$M = \bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha$$

と表すことができる．$\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系という．
ここで, (U, φ), (V, ψ) を M の座標近傍とし, $U \cap V \neq \emptyset$ であると仮定しよう．
このとき, φ は M の開集合 $U \cap V$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\varphi(U \cap V)$ への同相写像

$$\varphi : U \cap V \to \varphi(U \cap V)$$

を定める．この写像は正確には制限写像の記号を用いて $\varphi|_{U\cap V}$ と表すべきであるが, 煩雑さを避けるため単に φ と表すことにする．
同様に, ψ は M の開集合 $U \cap V$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U \cap V)$ への同相写像

$$\psi : U \cap V \to \psi(U \cap V)$$

を定める．
よって, $\psi \circ \varphi^{-1}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\varphi(U \cap V)$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U \cap V)$ への同相写像

$$\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \to \psi(U \cap V)$$

を定め, $\varphi \circ \psi^{-1}$ は $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\psi(U \cap V)$ から $\mathbf{R}^n$ の開集合 $\varphi(U \cap V)$ への同相写像

$$\varphi \circ \psi^{-1} : \psi(U \cap V) \to \varphi(U \cap V)$$

を定める．
$p \in U \cap V$ とし, $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ を p の (U, φ) に関する局所座標, $(y_1, y_2, \ldots, y_n)$ を p の (V, ψ) に関する局所座標とすると,

$$(\psi \circ \varphi^{-1})(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

および

$$(\varphi \circ \psi^{-1})(y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

がなりたつ．
$\psi \circ \varphi^{-1}$ を (U, φ) から (V, ψ) への座標変換, $\varphi \circ \psi^{-1}$ を (V, ψ) から (U, φ) への座標変換という．
座標変換は $\mathbf{R}^n$ の開集合から $\mathbf{R}^n$ の開集合への写像であるから, 微分可能性を考えることができる．このことを用いると, 微分可能多様体の定義を行うことができる．

定義　$r \in \mathbf{N} \cup \{\infty\}$ とする．M を n 次元位相多様体, $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ を M の座標近傍系とし, $\mathcal{S} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ とおく．$U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ となる任意の $\alpha, \beta \in A$ に対して座標変換

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

が C^r 級のとき, 組 $(M, \mathcal{S})$ または単に M を n 次元 C^r 級微分可能多様体または単に C^r 級多様体という．
このとき, $\mathcal{S}$ を C^r 級座標近傍系という．

注意　上の定義より, $\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1}$ は $\varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$ から $\varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$ への C^r 級微分同相写像を定める．すなわち, 2 つの写像

$$\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1} : \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta)$$

および

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1} : \varphi_\beta(U_\alpha \cap U_\beta) \to \varphi_\alpha(U_\alpha \cap U_\beta)$$

は互いに他方の逆写像で, ともに C^r 級である.
また, 位相多様体ではあるが, C^r 級多様体とはならないものが存在することが知られている.

1 つの位相多様体に対して考えることのできる C^r 級座標近傍系は 1 つとは限らない. しかし, これから考えていく多様体に対する様々な概念は, 次に定める関係の下で結ばれる C^r 級座標近傍系に対しては不変な概念となる.
M を位相多様体, $\mathcal{S},\mathcal{T}$ を M の C^r 級座標近傍系とする. $\mathcal{S}\cup\mathcal{T}$ が M の C^r 級座標近傍系となるとき, $\mathcal{S}\sim\mathcal{T}$ と表すことにする.

定理　$\sim$ は M の C^r 級座標近傍系全体の集合の上の同値関係. すなわち, M を位相多様体, $\mathcal{S},\mathcal{T},\mathcal{U}$ を M の C^r 級座標近傍系とすると, 次の (1)〜(3) がなりたつ.
(1) $\mathcal{S}\sim\mathcal{S}$.
(2) $\mathcal{S}\sim\mathcal{T}$ ならば, $\mathcal{T}\sim\mathcal{S}$.
(3) $\mathcal{S}\sim\mathcal{T}$ かつ $\mathcal{T}\sim\mathcal{U}$ ならば, $\mathcal{S}\sim\mathcal{U}$.

1 つの座標近傍系と同値なものをすべて集めたものを考えよう.

定義　$(M,\mathcal{S})$ を C^r 級多様体とする. M の C^r 級座標近傍系で $\mathcal{S}$ と同値なものすべての和集合を $\mathcal{M}(\mathcal{S})$ と表し, $\mathcal{S}$ により定まる極大座標近傍系という.

定理　M を位相多様体, $\mathcal{S},\mathcal{T}$ を M の C^r 級座標近傍系とする. $\mathcal{S}\sim\mathcal{T}$ となるための必要十分条件は $\mathcal{M}(\mathcal{S})=\mathcal{M}(\mathcal{T})$.

証明　まず, $\mathcal{S}\sim\mathcal{T}$ であると仮定する.
上の定理の (2) より, $\mathcal{T}\sim\mathcal{S}$.
ここで, $\mathcal{U}$ を $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}(\mathcal{S})$ となる M の C^r 級座標近傍系とする.
$\mathcal{M}(\mathcal{S})$ の定義より, $\mathcal{S}\sim\mathcal{U}$.
上の定理の (3) より, $\mathcal{T}\sim\mathcal{U}$.
よって, $\mathcal{U}\subset\mathcal{M}(\mathcal{T})$.
したがって, $\mathcal{M}(\mathcal{S})\subset\mathcal{M}(\mathcal{T})$.
同様に, $\mathcal{M}(\mathcal{T})\subset\mathcal{M}(\mathcal{S})$.
以上より, $\mathcal{M}(\mathcal{S})=\mathcal{M}(\mathcal{T})$.
逆に, $\mathcal{M}(\mathcal{S})=\mathcal{M}(\mathcal{T})$ であると仮定する.
このとき,

$$\begin{aligned}\mathcal{T}&\subset\mathcal{M}(\mathcal{T})\\&=\mathcal{M}(\mathcal{S}).\end{aligned}$$

よって, $\mathcal{S}\sim\mathcal{T}$. □

注意　多様体に対しては第 2 可算公理をみたすこと, すなわち可算個の元からなる基底が存在することを要請することもある.
C^r 級多様体が第 2 可算公理をみたすこととその極大座標近傍系が可算個の座標近傍からなることとは同値であることが分かる.

問題 2

1. f を位相空間 X から位相空間 Y への同相写像とする.
(1) O が X の開集合ならば, $f(O)$ は Y の開集合であることを示せ.
(2) A が X の閉集合ならば, $f(A)$ は Y の閉集合であることを示せ.

2. X を位相空間, A を X の部分空間とする. すなわち, A は X の部分集合で, A の位相については相対位相を考える.
(1) ι を A から X への包含写像, すなわち

$$\iota(a) = a \quad (a \in A)$$

とする. ι は連続であることを示せ.
(2) X が Hausdorff ならば, A も Hausdorff であることを示せ.

3. $\mathbf{R}$ の部分集合系 $\mathfrak{B}_u$ および $\mathfrak{B}_l$ を

$$\mathfrak{B}_u = \{(a,b] | a, b \in \mathbf{R},\ a < b\},\ \mathfrak{B}_l = \{[a,b) | a, b \in \mathbf{R},\ a < b\}$$

により定める. このとき, $\mathfrak{B}_u$ を基底とする $\mathbf{R}$ の位相 $\mathfrak{O}_u$ および $\mathfrak{B}_l$ を基底とする $\mathbf{R}$ の位相 $\mathfrak{O}_l$ が存在することが分かる. なお, $\mathfrak{O}_u$ を上限位相, $\mathfrak{O}_l$ を下限位相という.
(1) $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とする. 左半開区間 $(a, b]$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合かつ閉集合であることを示せ.
(2) $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とする. 右半開区間 $[a, b)$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合かつ閉集合であることを示せ.
(3) $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とする. 開区間 (a, b) は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合であることを示せ.
(4) $a, b \in \mathbf{R}$, $a < b$ とする. 開区間 (a, b) は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合であることを示せ.
(5) $\mathbf{R}$ の位相 $\mathfrak{O}$ が $\mathfrak{O}_u \subset \mathfrak{O}$ かつ $\mathfrak{O}_l \subset \mathfrak{O}$ をみたすとする. このとき, $\mathfrak{O}$ は離散位相であることを示せ.

4. $1_{\mathbf{R}}$ を $\mathbf{R}$ の上の恒等写像とし, $\mathbf{R}$ から $\mathbf{R}$ への同相写像 φ を

$$\varphi(x) = x^3 \quad (x \in \mathbf{R})$$

により定める. このとき, $\{(\mathbf{R}, 1_{\mathbf{R}})\}$ および $\{(\mathbf{R}, \varphi)\}$ はともに $\mathbf{R}$ の C^∞ 級座標近傍系となる. これらの座標近傍系は同値ではないことを示せ.

5. $n \in \mathbf{N}$ とする. $x, y \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ に対して, ある $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ が存在し $x = \lambda y$ となるとき, $x \sim y$ と表すことにする. $\sim$ は $\mathbf{R}^n \setminus \{0\}$ の上の同値関係であることを示せ.
なお, 商集合 $\mathbf{R}^n / \sim$ を $\mathbf{P}^n$ または $\mathbf{R}P^n$ と表し, n 次元実射影空間という. $x \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ を含む同値類を $\pi(x)$ と表し, $\pi(x)$ に $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を通る直線 tx $(t \in \mathbf{R})$ を対応させると, この対応は 1 対 1 となる. すなわち, $\mathbf{R}P^n$ は $\mathbf{R}^{n+1}$ の原点を通る直線全体の集合とみなすことができる.

問題 2 の解答

1. (1) 仮定より, f の逆写像

$$f^{-1} : Y \to X$$

が存在し, f^{-1} は連続である.
更に, O は X の開集合だから, $(f^{-1})^{-1}(O)$ は Y の開集合で,

$$(f^{-1})^{-1}(O) = f(O).$$

よって, $f(O)$ は Y の開集合.

(2) f^{-1} は連続で, A は X の閉集合だから, $(f^{-1})^{-1}(A)$ は Y の閉集合.
また,

$$(f^{-1})^{-1}(A) = f(A).$$

よって, $f(A)$ は Y の閉集合.

2. (1) O を X の開集合とすると,

$$\iota^{-1}(O) = O \cap A.$$

相対位相の定義より, $O \cap A$ は A の開集合.
よって, ι は連続.

(2) a, b を A の異なる 2 点とすると, a, b は X の異なる 2 点.
X は Hausdorff だから, X の開集合 U, V が存在し,

$$a \in U,\ b \in V,\ U \cap V = \emptyset.$$

よって,

$$U' = U \cap A,\ V' = V \cap A$$

とおくと, U', V' は A の開集合で,

$$a \in U',\ b \in V',\ U' \cap V' = \emptyset.$$

したがって, A は Hausdorff.

3. (1) まず, $(a, b]$ が $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合であることは明らか.
次に, $n \in \mathbf{N}$ とすると, 左半開区間 $(a-n, a]$ および $(b, b+n]$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合.
ここで,

$$(-\infty, a] \cup (b, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} (a-n, a] \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} (b, b+n].$$

よって, $(-\infty, a] \cup (b, +\infty)$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合.
更に,

$$(a, b] = \left((-\infty, a] \cup (b, +\infty)\right)^c.$$

したがって, $(a, b]$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の閉集合.

(2) まず, $[a, b)$ が $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合であることは明らか.
次に, $n \in \mathbf{N}$ とすると, 右半開区間 $[a-n, a)$ および $[b, b+n)$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合.
ここで,

$$(-\infty, a) \cup [b, +\infty) = \bigcup_{n=1}^{\infty} [a-n, a) \cup \bigcup_{n=1}^{\infty} [b, b+n).$$

よって, $(-\infty, a) \cup [b, +\infty)$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合.
更に,

$$[a, b) = ((-\infty, a) \cup [b, +\infty))^c.$$

したがって, $[a, b)$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の閉集合.

(3) $n \in \mathbf{N}$ とすると, 左半開区間 $\left(a, b - \dfrac{b-a}{2n}\right]$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合.
ここで,

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(a, b - \frac{b-a}{2n}\right].$$

よって, (a, b) は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_u)$ の開集合.

(4) $n \in \mathbf{N}$ とすると, 右半開区間 $\left[a + \dfrac{b-a}{2n}, b\right)$ は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合.
ここで,

$$(a, b) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[a + \frac{b-a}{2n}, b\right).$$

よって, (a, b) は $(\mathbf{R}, \mathfrak{O}_l)$ の開集合.

(5) $a, b, c \in \mathbf{R}$, $a < b < c$ とする.
(1) より, $(a, b] \in \mathfrak{O}_u$ だから, 仮定より, $(a, b] \in \mathfrak{O}$.
(2) より, $[b, c) \in \mathfrak{O}_l$ だから, 仮定より, $[b, c) \in \mathfrak{O}$.
よって,

$$\{b\} = (a, b] \cap [b, c) \in \mathfrak{O}.$$

したがって, $\mathfrak{O}$ は離散位相.

4. $x \in \mathbf{R}$ とすると,

$$(1_{\mathbf{R}} \circ \varphi^{-1})(x) = \sqrt[3]{x}.$$

よって, $1_{\mathbf{R}} \circ \varphi^{-1}$ は $x = 0$ で微分可能でない.
したがって, $\{(\mathbf{R}, 1_{\mathbf{R}})\}$ と $\{(\mathbf{R}, \varphi)\}$ は同値ではない.

5. $x, y, z \in \mathbf{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ とする.
まず, $x = 1x$ だから, $x \sim x$.
次に, $x \sim y$ とする.
このとき, ある $\lambda \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ が存在し, $x = \lambda y$.
よって, $y = \dfrac{1}{\lambda}x$.
したがって, $y \sim x$.
更に, $x \sim y$, $y \sim z$ とする.
このとき, ある $\lambda, \mu \in \mathbf{R} \setminus \{0\}$ が存在し, $x = \lambda y$, $y = \mu z$.
よって, $x = (\lambda\mu)z$.
したがって, $x \sim z$.
以上より, $\sim$ は同値関係.