§6. 接ベクトルと接空間

多様体に対しても接ベクトルを考えることができる.
まず, $\mathbf{R}^n$ の接ベクトルの場合と同様に, 単純に次のようなことを考えてみよう.
$(M, \mathcal{S})$ を n 次元 C^r 級多様体とする. ただし, $r \geq 1$ とする. また, $p \in M$ とし, $(U, \varphi) \in \mathcal{S}$ を $p \in U$ となるように選んでおく. 更に, $\varepsilon > 0$ とし,

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

を $\gamma(0) = p$ で, 像が U に含まれるような C^r 級曲線とする.
このとき, $\mathbf{R}^n$ の元

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi \circ \gamma) \qquad (*)$$

が座標変換でどのように変わるのかを調べてみよう.
上の (U, φ) に加え, $(V, \psi) \in \mathcal{S}$ も $p \in V$ となるように選んでおき, γ の像は V にも含まれているとする.
このとき,

$$\psi \circ \gamma = (\psi \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$$

だから, 連鎖律より,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\psi \circ \gamma) = \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (\varphi \circ \gamma) \right) (J(\psi \circ \varphi^{-1}))(\varphi(p)).$$

一般に, 座標変換は恒等写像ではないから, その Jacobian は 1 とは異なり, $(*)$ は座標近傍に依存する式となってしまう.
よって, $(*)$ を p における接ベクトルとして定義することはできない.
そこで, 接ベクトルを微分作用素と対応させることによって定めよう.
f を p の近傍で定義された C^r 級関数とし,

$$v_\gamma(f) = \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (f \circ \gamma)$$

とおく. f から $v_\gamma(f)$ への対応を γ に沿う $t = 0$ における方向微分という. また, $v_\gamma(f)$ を f の $t = 0$ における γ 方向の微分係数という. これらは座標近傍には依存しない概念であることに注意しよう.
$v_\gamma(f)$ を座標近傍を用いて表してみよう.
φ を

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておく.
このとき,

$$f \circ \gamma = (f \circ \varphi^{-1}) \circ (\varphi \circ \gamma)$$

だから,

$$v_\gamma(f) = \sum_{i=1}^n \frac{\partial (f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p)) \dot{x}_i(0).$$

このとき, 次がなりたつ.

定理　M を C^r 級多様体とする. $p \in M$ とし, γ を $\gamma(0)=p$ となる 0 を含む開区間で定義された M 上の C^r 級曲線とする. $a, b \in \mathbf{R}$ とし, f, g を p の近傍で定義された C^r 級関数とすると, 次の (1), (2) がなりたつ.
(1) $v_\gamma(af+bg) = av_\gamma(f) + bv_\gamma(g)$.
(2) $v_\gamma(fg) = v_\gamma(f)g(p) + f(p)v_\gamma(g)$.
更に, $i = 1, 2, \ldots, n$ に対して f から $\dfrac{\partial(f \circ \varphi^{-1})}{\partial x_i}(\varphi(p))$ への対応を $\left(\dfrac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$ と表すことにする. このとき,

$$v_\gamma(f) = \left(\sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p\right) f = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0)\frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

と表すことができる.
そこで, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ に対して

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

を p における接ベクトルという. 特に, 上の v_γ は p の接ベクトルで,

$$v_\gamma = \sum_{i=1}^n \dot{x}_i(0)\left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と表すことができる.
M 上の曲線を用いなくとも, 接ベクトルは方向微分を定める. すなわち, f から

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p)$$

への対応を定めることができる.
p における接ベクトル全体の集合を T_pM と表す. すなわち,

$$T_pM = \left\{ \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \,\middle|\, a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R} \right\}$$

である. T_pM は自然にベクトル空間となる. T_pM を p における接ベクトル空間または接空間という.

定理　$\left(\dfrac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\dfrac{\partial}{\partial x_n}\right)_p$ は 1 次独立.
特に, これらは T_pM の基底となり, T_pM は n 次元ベクトル空間である.

証明　$a_1, a_2, \ldots, a_n \in \mathbf{R}$ に対して

$$\sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p = 0$$

と仮定する.
このとき, f を p の近傍で定義された C^r 級関数とすると,

$$\sum_{i=1}^n a_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(p) = 0.$$

特に, $j = 1, 2, \ldots, n$ とし, f を $f \circ \varphi^{-1} = x_j$ となるように選んでおくと, f は p の近傍で定義された C^r 級関数で,

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial x_i}(p) &= \left(\frac{\partial x_j}{\partial x_i}\right)(\varphi(p)) \\ &= \delta_{ij}.\end{aligned}$$

よって,

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0.$$

□

φ に加え, もう 1 つの局所座標系 ψ も考え,

$$\psi = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

と表しておくと, 上の定理より,

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\}, \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right\}$$

はともに T_pM の基底である. これらの基底に対する基底変換行列を求めよう.

定理　基底変換

$$\left\{\left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)_p\right\} \to \left\{\left(\frac{\partial}{\partial y_1}\right)_p, \left(\frac{\partial}{\partial y_2}\right)_p, \ldots, \left(\frac{\partial}{\partial y_n}\right)_p\right\}$$

の基底変換行列は $\left(\dfrac{\partial x_i}{\partial y_j}(p)\right)$.

証明　求める基底変換行列を (p_{ij}) とおくと,

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_j}\right)_p = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} \left(\frac{\partial}{\partial x_k}\right)_p.$$

よって, f を p の近傍で定義された C^r 級関数とすると,

$$\frac{\partial f}{\partial y_j}(p) = \sum_{k=1}^{n} p_{kj} \frac{\partial f}{\partial x_k}(p).$$

特に, $i = 1, 2, \ldots, n$ とし, f を $f \circ \varphi^{-1} = x_i$ となるように選んでおくと, f は p の近傍で定義された C^r 級関数で,

$$\begin{aligned}\frac{\partial x_i}{\partial y_j}(p) &= \sum_{k=1}^{n} p_{kj} \frac{\partial x_i}{\partial x_k}(\varphi(p)) \\ &= p_{ij}.\end{aligned}$$

□

問題 6

1. M を C^r 級多様体とし, $p \in M$ とする. v を $C^r(M)$ から $\mathbf{R}$ への写像とし, 任意の $a, b \in \mathbf{R}$ および任意の $f, g \in C^r(M)$ に対して, 次の (i), (ii) がなりたつと仮定する.

$$\text{(i)}\ \ v(af + bg) = av(f) + bv(g).$$
$$\text{(ii)}\ v(fg) = v(f)g(p) + f(p)v(g).$$

なお, $r = \infty$ のときは上のような v 全体の集合は T_pM と同一視することができることが分かる.
(1) f を恒等的に 1 に等しい M 上の定数関数とする. このとき, $v(f) = 0$ であることを示せ.
(2) f を M 上の定数関数とする. このとき, $v(f) = 0$ であることを示せ.
(3) $f, g \in C^r(M)$ とし, p のある開近傍 U に対して

$$f|_U = g|_U$$

がなりたつとする. このとき, $v(f) = v(g)$ であることを示せ.

2. $0 < \theta_0 \leq \pi$ に対して

$$p = (\sin\theta_0, 0, \cos\theta_0)$$

とおく. このとき, $\varepsilon > 0$ とし, $\gamma(0) = p$ となる 2 次元球面

$$S^2 = \{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$$

上の C^∞ 級曲線

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to S^2$$

を

$$\gamma(t) = (\sin\theta_0 \cos t, \sin\theta_0 \sin t, \cos\theta_0) \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

により定める. また, $N = (0, 0, 1)$ とおき, φ を N を中心とする立体射影とする. すなわち,

$$\varphi(x, y, z) = \left(\frac{x}{1-z}, \frac{y}{1-z}\right) \quad ((x, y, z) \in S^2 \setminus \{N\})$$

である. このとき, φ は $S^2 \setminus \{N\}$ 上の局所座標系で, γ の像は $S^2 \setminus \{N\}$ に含まれる.
φ を

$$\varphi = (x_1, x_2)$$

と表しておく. p における接ベクトル v_γ を上の局所座標系を用いて表せ.

3. M を C^r 級多様体とし, $p \in M$ とする. 任意の $v \in T_pM$ に対して, $\gamma(0) = p$ となる C^r 級曲線

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

で, $v_\gamma = v$ となるものが存在することを示せ. ただし, ε は十分小さい正の数である.

問題 6 の解答

1. (1) (ii) において $f = g = 1$ とすると，

$$v(1 \cdot 1) = v(1) \cdot 1 + 1v(1).$$

すなわち，

$$v(1) = v(1) + v(1).$$

よって，

$$v(1) = 0.$$

(2) $c \in \mathbf{R}$ とする．
(i) において

$$a = c,\ b = 0,\ f = 1$$

とすると，

$$v(c \cdot 1 + 0 \cdot g) = cv(1) + 0v(g).$$

よって，(1) より，

$$\begin{aligned} v(c) &= cv(1) \\ &= c \cdot 0 \\ &= 0. \end{aligned}$$

(3) まず，p の開近傍 V と M 上の C^r 級関数 h で，次の (a), (b) をみたすものが存在する．

(a) $\overline{V} \subset U$.
(b) $h(x) = 0\ (x \in M \setminus U)$, $0 \leq h(x) < 1\ (x \in U \setminus \overline{V})$, $h(x) = 1\ (x \in \overline{V})$.

このとき，

$$(f - g)h = 0.$$

よって，(2), (ii), (i) より，

$$\begin{aligned} 0 &= v((f-g)h) \\ &= v(f-g)h(p) + (f-g)(p)v(h) \\ &= (v(f) - v(g)) \cdot 1 + 0v(h) \\ &= v(f) - v(g). \end{aligned}$$

したがって，

$$v(f) = v(g).$$

2. $t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ とすると，

$$\begin{aligned} (\varphi \circ \gamma)(t) &= \varphi(\sin\theta_0 \cos t, \sin\theta_0 \sin t, \cos\theta_0) \\ &= \left(\frac{\sin\theta_0 \cos t}{1 - \cos\theta_0}, \frac{\sin\theta_0 \sin t}{1 - \cos\theta_0} \right). \end{aligned}$$

よって,

$$
\begin{aligned}
v_\gamma &= \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{\sin\theta_0 \cos t}{1-\cos\theta_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \frac{\sin\theta_0 \sin t}{1-\cos\theta_0} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \\
&= \frac{-\sin\theta_0 \sin 0}{1-\cos\theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)_p + \frac{\sin\theta_0 \cos 0}{1-\cos\theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p \\
&= \frac{\sin\theta_0}{1-\cos\theta_0} \left(\frac{\partial}{\partial x_2}\right)_p .
\end{aligned}
$$

3. (U, φ) を $p \in U$ となる座標近傍とし,

$$\varphi = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

と表しておく.
このとき,

$$v = \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p$$

と表すことができる.
ε は十分小さい正の数だから, $\gamma(0) = p$ となる C^r 級曲線

$$\gamma : (-\varepsilon, \varepsilon) \to M$$

を

$$\varphi \circ \gamma = (x_1(p) + a_1 t, x_2(p) + a_2 t, \ldots, x_n(p) + a_n t) \quad (t \in (-\varepsilon, \varepsilon))$$

となるように定めることができる.
このとき,

$$
\begin{aligned}
v_\gamma &= \sum_{i=1}^n \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (x_i(p) + a_i t) \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \\
&= \sum_{i=1}^n a_i \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_p \\
&= v.
\end{aligned}
$$